

Contrôle de maths L3 : résidus et calcul d'intégrales réelles

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Singularités et théorème des résidus
- **Durée conseillée** : 3 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Communiquer : énoncer le théorème des résidus et le théorème de Rouché avec leurs hypothèses
 - Calculer : développer en série de Laurent sur une couronne et obtenir un résidu en un pôle simple ou double
 - Représenter : dessiner le contour d'intégration et situer les pôles par rapport à lui
 - Raisonner : majorer l'intégrale sur un arc de cercle pour passer à la limite

Exercice 1 : Question de cours : singularités et théorème des résidus (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans tout le sujet, les cercles sont parcourus une fois dans le sens direct. On note

$$D^*(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}.$$

- a. Soit f holomorphe sur $D^*(a, r)$, de série de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$. Donnez la définition d'une singularité effaçable, d'un pôle d'ordre m et d'une singularité essentielle en a à l'aide des

coefficients c_n . Définissez aussi le résidu $\text{Res}(f, a)$. (1 point)

b. Énoncez le théorème des résidus pour une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe privé d'un nombre fini de points et un lacet simple. (1 point)

c. Soient g et h holomorphes au voisinage de a , avec $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$ et $h'(a) \neq 0$. Démontrez que a est un pôle simple de g/h et que $\text{Res}\left(\frac{g}{h}, a\right) = \frac{g(a)}{h'(a)}$. (1 point)

Exercice 2 : Singularités, séries de Laurent et résidus (4 points)

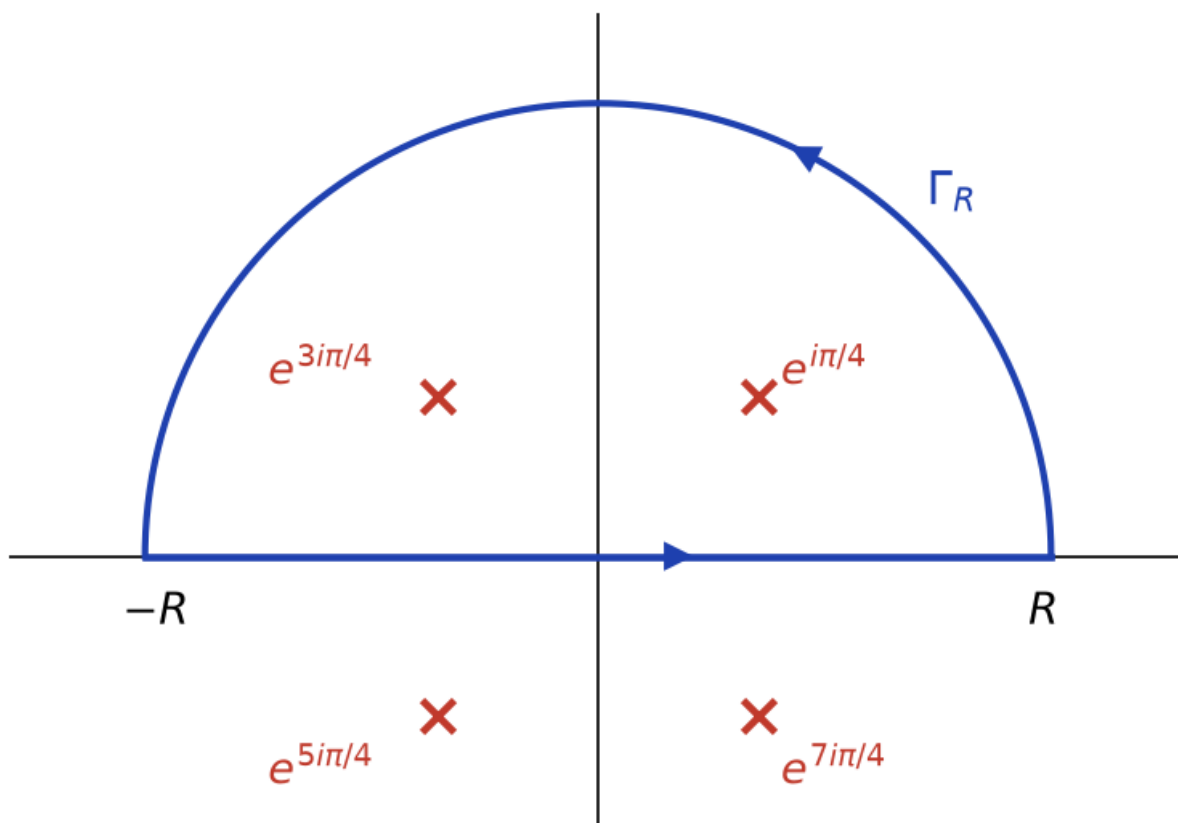
a. Déterminez la nature de la singularité en 0 de $z \rightarrow \frac{\sin z}{z}$, puis de $z \rightarrow e^{1/z}$. Donnez le résidu de $e^{1/z}$ en 0 . (1,5 point)

b. Soit $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Donnez le développement en série de Laurent de f sur la couronne $0 < |z| < 1$, puis sur la couronne $|z| > 1$. Pourquoi ces deux développements sont-ils différents ? (1,5 point)

c. Calculez $\text{Res}(z^2 e^{1/z}, 0)$, puis $\text{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^2}, i\right)$. (1 point)

Exercice 3 : Intégrale d'une fraction rationnelle sur la droite réelle (4 points)

On veut calculer $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$. On pose $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$. Pour $R > 1$, on note Γ_R le demi-cercle $t \rightarrow Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, et γ_R le lacet formé du segment $[-R, R]$ suivi de Γ_R .



- a. Justifiez la convergence de I . Déterminez les pôles de f , leur ordre, et ceux qui sont situés à l'intérieur de γ_R . Calculez les résidus correspondants. (1,5 point)
- b. Appliquez le théorème des résidus pour calculer $\int_{\gamma_R} f(z) dz$. (1 point)
- c. Montrez que $\int_{\Gamma_R} f(z) dz$ tend vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$, en rédigeant la majoration. Déduisez-en la valeur de I . (1,5 point)

Exercice 4 : Deux autres intégrales réelles (4 points)

- a. À l'aide du changement de variable $z = e^{i\theta}$, calculez $J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$. Faites un dessin du

cercle unité et des pôles de la fonction obtenue. (2 points)

- b. On pose $g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$ et on reprend le contour γ_R de l'exercice 3. Calculez $\int_{\gamma_R} g(z) dz$ pour $R > 1$. Montrez ensuite que l'intégrale sur Γ_R tend vers 0, puis déduisez-en $K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$. (2 points)

Exercice 5 : Problème : nombre de zéros par le théorème de Rouché (5 points)

On considère le polynôme $P(z) = z^5 - 6z^2 + 2$.

- Énoncez le théorème de Rouché. (1 point)
- Montrez que P a exactement deux zéros, comptés avec multiplicité, dans le disque ouvert $D(0,1)$, et qu'il n'en a aucun sur le cercle $|z| = 1$. (1,5 point)
- Montrez que tous les zéros de P sont dans $D(0,2)$. Combien de zéros P a-t-il dans la couronne $1 < |z| < 2$? (1 point)
- Montrez que les deux zéros de P situés dans $D(0,1)$ sont réels. Montrez ensuite que P a exactement un zéro réel dans la couronne. Concluez sur la position des deux derniers zéros. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : résidus et calcul d'intégrales réelles

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Théorème des résidus](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [théorème des résidus](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).