

Contrôle de maths L3 : réduction de Jordan et décomposition de Dunford

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Réduction de Jordan et décomposition de Dunford
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 5 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer l'unicité de la décomposition de Dunford
 - Calculer : obtenir sous-espaces caractéristiques et projecteurs spectraux
 - Représenter : lire la réduite de Jordan d'un nilpotent sur un tableau de Young
 - Calculer : exprimer une base duale et une application transposée
 - Modéliser : résoudre un système différentiel linéaire par l'exponentielle de matrice

Exercice 1 : Question de cours : unicité de la décomposition de Dunford (3 points)

Calculatrice interdite.

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .

- Énoncez le théorème de décomposition de Dunford : existence, unicité, et expression des deux termes comme polynômes en u . (1 point)
- Montrez qu'un endomorphisme à la fois diagonalisable et nilpotent est nul. En admettant l'existence et le fait que d et n sont des polynômes en u , démontrez l'unicité de la décomposition. (2

points)

Exercice 2 : Décomposition de Dunford d'une matrice 3×3 (5 points)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calculez le polynôme caractéristique χ_A . Vous devez trouver $\chi_A = (X - 1)(X - 2)^2$. (1 point)
- Déterminez $\text{Ker}(A - I_3)$, $\text{Ker}(A - 2I_3)$ et $\text{Ker}(A - 2I_3)^2$. La matrice A est-elle diagonalisable ? (1,5 point)
- Vérifiez que $(X - 2)^2 - (X - 1)(X - 3) = 1$. Déduisez-en les projecteurs P_1 et P_2 sur les sous-espaces caractéristiques, sous forme de polynômes en A . Calculez-les, puis donnez la décomposition de Dunford $A = D + N$. (2 points)
- Un étudiant écrit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et affirme avoir obtenu la décomposition de Dunford. Qu'en pensez-vous ? (0,5 point)

Exercice 3 : Base duale et transposée (3 points)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2. Pour $a \in \{0, 1, 2\}$, on note φ_a la forme linéaire $P \rightarrow P(a)$. On note $\mathcal{u}$ l'endomorphisme de dérivation $P \rightarrow P'$.

- a. Montrez que $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est une base de E^* . Déterminez la base (L_0, L_1, L_2) de E dont elle est la base duale. (1,5 point)
- b. Exprimez ${}^tu(\varphi_0)$ comme combinaison linéaire de φ_0 , φ_1 et φ_2 . Traduisez le résultat par une formule donnant $P'(0)$ pour tout $P \in E$. (1,5 point)

Exercice 4 : Réduction de Jordan d'un nilpotent 4x4 (5 points)

On considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

- a. Calculez N^2 et N^3 . Déterminez les dimensions de $\text{Ker } N$, $\text{Ker } N^2$ et $\text{Ker } N^3$. Quel est l'indice de nilpotence de N ? (1,5 point)
- b. Dessinez le tableau de Young associé aux noyaux itérés. Déduisez-en la réduite de Jordan J de N . (1 point)
- c. Construisez une matrice inversible P telle que $N = P J P^{-1}$. Vous partirez du vecteur e_1 . (1,5 point)
- d. Combien existe-t-il de classes de similitude de matrices nilpotentes de taille 4? Justifiez. (1 point)

Exercice 5 : Problème : exponentielle de matrice et système différentiel (4 points)

On reprend la matrice A et sa décomposition $A = D + N$ de l'exercice 2. On cherche les fonctions dérivables $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ telles que $X'(t) = A X(t)$ et $X(0) = (0, 0, 1)$.

- Justifiez l'égalité $\exp(tA) = \exp(tD) \exp(tN)$ pour tout réel t . (1 point)
- Calculez $\exp(tN)$, puis exprimez $\exp(tD)$ à l'aide de P_1 et P_2 . (1 point)
- Déduisez-en la matrice $\exp(tA)$. (1 point)
- Donnez la solution X du problème, puis vérifiez-la directement. (1 point)



Réviser avant le contrôle : réduction de Jordan et décomposition de Dunford

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Réduction de Jordan](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [réduction de jordan](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).