

Contrôle de maths L3 : partiel final : intégration et probabilités

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitres** : Intégrale de Lebesgue et théorèmes de convergence + Espaces probabilisés, variables aléatoires et espérance + Convergences, grands nombres et central limite
- **Durée conseillée** : 3 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3,5 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3,5 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Communiquer : énoncer le théorème de convergence dominée et le théorème de dérivation sous le signe intégrale
 - Raisonner : vérifier une hypothèse de domination pour passer à la limite dans une espérance
 - Calculer : obtenir une loi par la fonction muette et par la fonction caractéristique
 - Modéliser : estimer une intégrale par la méthode de Monte-Carlo et construire un intervalle de confiance asymptotique

Exercice 1 : Question de cours : convergence dominée et continuité (3,5 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Les valeurs numériques utiles sont données dans l'exercice 5.

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour une variable réelle X , on note $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$.

- a. Énoncez le théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions sur un espace mesuré $(E, \mathcal{T}, \mu)$. (1 point)
- b. Énoncez le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour $F(s) = \int_E f(s, x) d\mu(x)$, où s décrit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. (1 point)
- c. Démontrez que, pour toute variable aléatoire réelle X , la fonction φ_X est continue sur $\mathbb{R}$. (1,5 point)

Exercice 2 : Passages à la limite dans une espérance (4 points)

Dans cet exercice, X est une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty[$.

- a. On suppose X intégrable. Montrez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \mathbb{E} \left[\ln \left(1 + \frac{X}{n} \right) \right] = \mathbb{E}[X]$. (1,5 point)
- b. Sans hypothèse d'intégrabilité, montrez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\left(1 + \frac{X}{n} \right)^{-n} \right] = \mathbb{E}[e^{-X}]$. Calculez cette limite lorsque X suit la loi uniforme sur $[0, 2]$. (1 point)
- c. On pose $L(s) = \mathbb{E}[e^{-sX}]$ pour $s \geq 0$. Montrez que L est continue sur $[0, +\infty[$, puis dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $L'(s) = -\mathbb{E}[Xe^{-sX}]$. (1,5 point)

Exercice 3 : La loi de Cauchy (4 points)

Soit X une variable de densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}$ (loi de Cauchy). On admet que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx = \pi e^{-|t|}$ pour tout réel t .

- a. Montrez que $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$. La variable X est-elle intégrable ? (1 point)
- b. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables indépendantes de même loi que X , et $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Déterminez la loi de $\bar{X}_n$. Montrez que $\bar{X}_n$ ne converge en probabilité vers aucune constante. Pourquoi cela ne contredit-il pas la loi des grands nombres ? (1,5 point)
- c. Montrez, par la méthode de la fonction muette, que $\frac{1}{X}$ suit encore la loi de Cauchy. (1,5 point)

Exercice 4 : Fubini-Tonelli et queue de distribution (3,5 points)

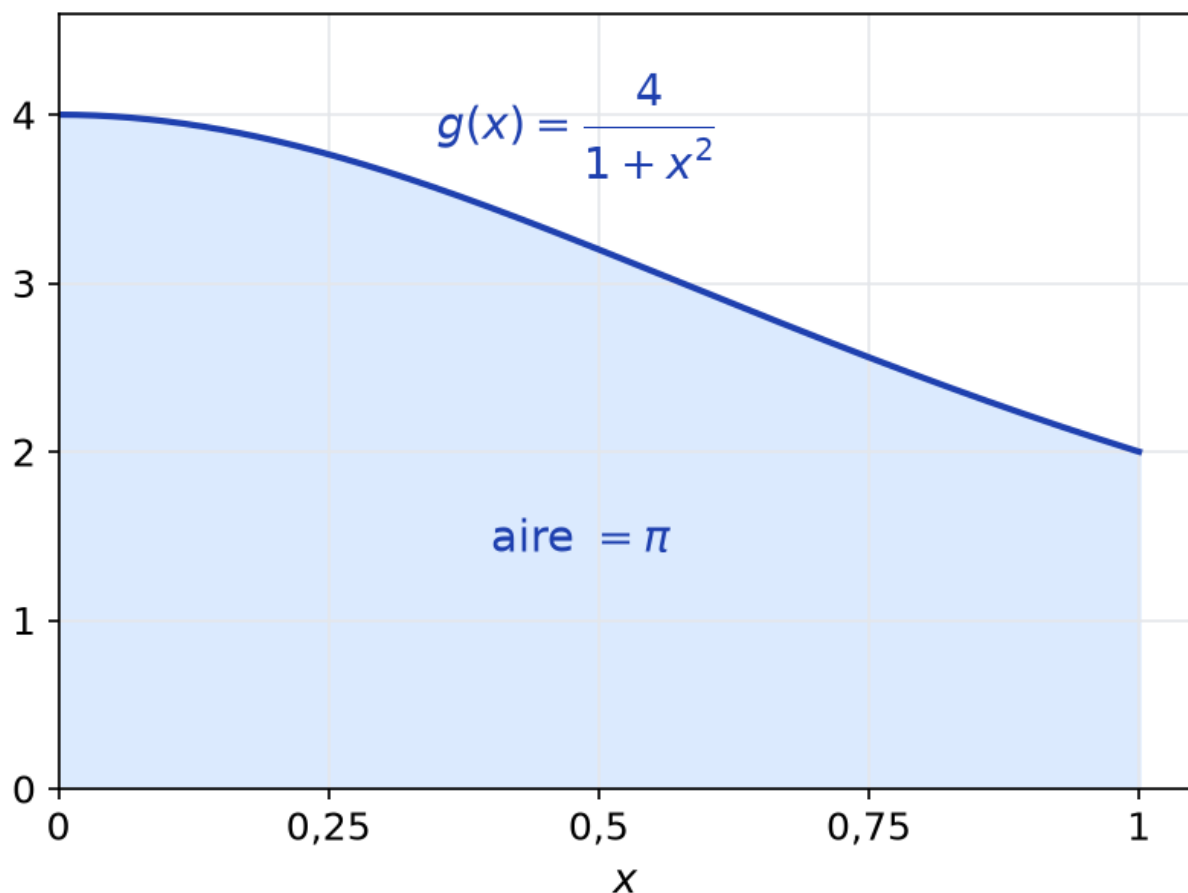
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty[$.

- a. Montrez que $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t) dt$, dans $[0, +\infty]$. Citez précisément le théorème utilisé. (1,5 point)
- b. Montrez de même que $\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{+\infty} 2t \mathbb{P}(X > t) dt$. (1 point)
- c. On suppose que $\mathbb{P}(X > t) = \frac{1}{(1+t)^3}$ pour tout $t \geq 0$. Calculez $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ et $\text{Var}(X)$. (1 point)

Exercice 5 : Problème : méthode de Monte-Carlo et intervalle de confiance (5 points)

On pose $g(x) = \frac{4}{1+x^2}$, de sorte que $\int_0^1 g(x) dx = 4 \arctan 1 = \pi$. Soit $(U_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $G_k = g(U_k)$ et

$$I_n = \frac{G_1 + \dots + G_n}{n}.$$



On donne : $\pi^2 \approx 9,8696$, $2\pi \approx 6,2832$, $\sqrt{0,4136} \approx 0,6431$ et $\Phi(1,96) \approx 0,975$, où Φ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$.

a. Énoncez la loi forte des grands nombres (admise). Montrez que I_n converge presque sûrement vers π . (1 point)

b. Calculez $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ à l'aide du changement de variable $x = \tan\theta$. Déduisez-en que $\sigma^2 = \text{Var}(G_1) = 2\pi + 4 - \pi^2$. (1,5 point)

c. À l'aide du théorème central limite, construisez un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95 % pour π . Comment faire en pratique, puisque σ dépend de π ? On pourra admettre le lemme de Slutsky. (1,5 point)

- d. Pour $n = 10\,000$, donnez la demi-largeur de cet intervalle. On estime aussi π par la moyenne des $4\sqrt{1 - U_k^2}$. Calculez la variance de $4\sqrt{1 - U_1^2}$, puis comparez les deux méthodes. (1 point)



Réviser avant le contrôle : partiel final : intégration et probabilités

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Intégrale de Lebesgue](#) » en L3 et « [Variables aléatoires et espérance](#) » en L3 et « [Loi des grands nombres et TCL](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégrale de lebesgue](#), [variables aléatoires et espérance](#), [loi des grands nombres et tcl](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : convergence monotone et lemme de Fatou](#)
- [Contrôle de maths L3 : convergence dominée et intégrales à paramètre](#)
- [Contrôle de maths L3 : loi d'un vecteur aléatoire et indépendance](#)
- [Contrôle de maths L3 : modes de convergence, Borel-Cantelli et TCL](#)