

Contrôle de maths L3 : partiel de topologie des espaces normés

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitres** : Espaces normés et applications linéaires continues + Compacité et connexité + Complétude, espaces de Banach et point fixe
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 5 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 11 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer l'équivalence des normes en dimension finie et le théorème de Riesz
 - Chercher : établir la compacité d'une partie de l_∞ par extraction diagonale
 - Modéliser : écrire une équation fonctionnelle ou matricielle comme un problème de point fixe
 - Calculer : estimer le nombre d'itérations nécessaire pour une précision donnée
 - Communiquer : utiliser la connexité pour séparer des parties de $M_n(\mathbb{R})$

Exercice 1 : Questions de cours, dimension finie et théorème de Riesz (5 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 3 heures.

Les espaces vectoriels sont réels.

- a. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $d \geq 1$, $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E et, pour $x = \sum x_i e_i$, $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. On admet que les parties fermées bornées de

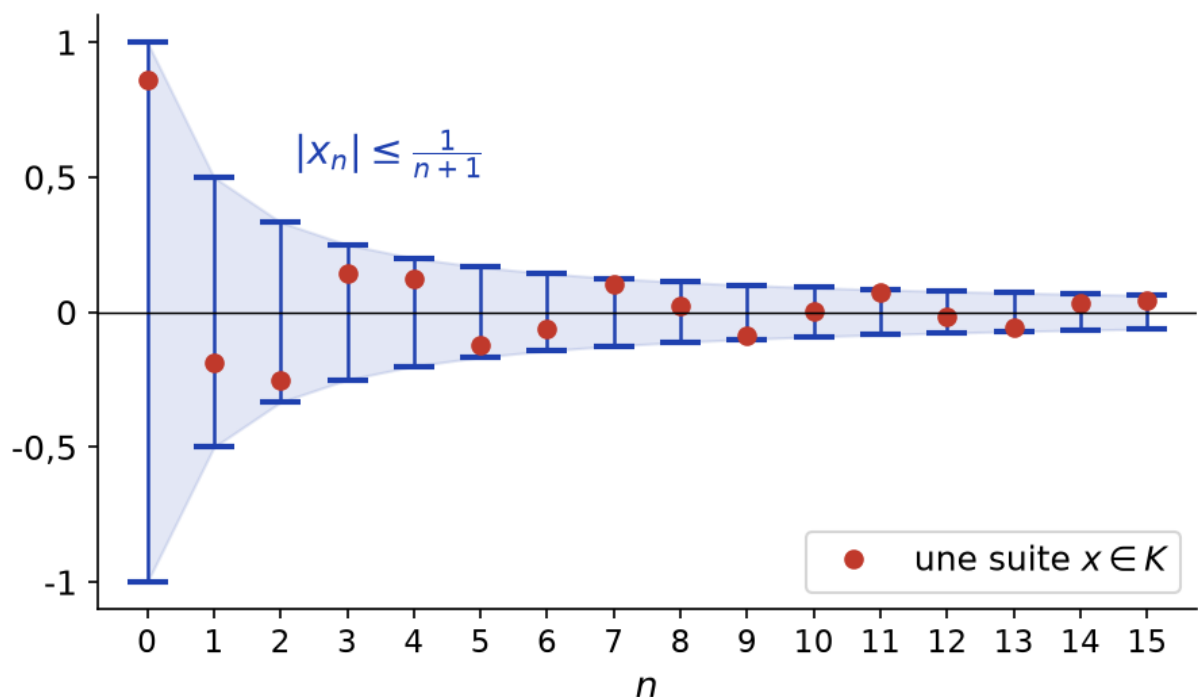
$(E, \|\cdot\|_\infty)$ sont compactes. Démontrez que toute norme N sur E est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$, et concluez que toutes les normes sur E sont équivalentes. (3 points)

- b. On admet le **lemme de Riesz** : si F est un sous-espace fermé d'un espace normé E , distinct de E , il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $d(u, F) \geq \frac{1}{2}$. Énoncez le théorème de Riesz sur la compacité de la boule unité fermée, puis démontrez que si E est de dimension infinie, sa boule unité fermée n'est pas compacte. (2 points)

Exercice 2 : Compacité dans l'espace des suites bornées (4 points)

On note ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$, et

$$K = \left\{ x \in \ell^\infty : |x_n| \leq \frac{1}{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \right\}.$$



- a. Montrez, à l'aide des suites $e^{(p)}$ dont seul le terme d'indice p vaut 1, que la boule unité fermée de ℓ^∞ n'est pas compacte. (1 point)

- b. Montrez que K est compact. On pourra, à partir d'une suite $(x^{(p)})_p$ de K , construire par extraction diagonale une sous-suite dont chaque coordonnée converge. (2 points)
- c. Montrez que K est d'intérieur vide dans ℓ^∞ . (1 point)

Exercice 3 : Problème, points fixes et parties de $M_n(\mathbb{R})$ (11 points)

Partie A : une équation fonctionnelle. On note $E = C([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme N_∞ , dont on rappelle qu'il est complet. Pour $f \in E$, on définit $\Phi(f)$ par

$$\Phi(f)(x) = x + \frac{1}{2} \sin(f(x^2)), \quad x \in [0,1].$$

On cherche les $f \in E$ telles que $\Phi(f) = f$.

- a. Montrez que $\Phi(f) \in E$ pour tout $f \in E$ et que Φ est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne pour N_∞ . (1,5 point)
- b. Déduisez-en que l'équation admet une unique solution $f^* \in E$, limite de la suite définie par $f_0 = 0$ et $f_{n+1} = \Phi(f_n)$. Calculez $f^*(0)$. (1 point)
- c. Montrez que $G = \left\{ f \in E : 0 \leq f \leq \frac{3}{2} \right\}$ est un fermé de E stable par Φ . Déduisez-en que $x \leq f^*(x) \leq x + \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$. (1,5 point)
- d. Montrez que f^* est croissante sur $[0,1]$. On pourra utiliser l'ensemble H des fonctions croissantes de G et le fait que $\frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$. (1 point)
- e. À l'aide de l'estimation d'erreur du théorème du point fixe, déterminez un rang n à partir duquel $N_\infty(f_n - f^*) \leq 10^{-2}$. (1 point)

Partie B : parties de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $n \geq 1$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme subordonnée $\|\cdot\|$; c'est un espace de dimension finie, donc complet.

- f. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\|B\| \leq \frac{1}{8}$. Montrez que l'équation $X = B + X^2$ admet une unique solution $X(B)$ dans la boule fermée $\overline{B}(0, \frac{1}{4})$. (1,5 point)
- g. Montrez que $\|X(B) - X(B')\| \leq 2 \|B - B'\|$ pour $B, B' \in \overline{B}(0, \frac{1}{8})$. Déduisez-en que l'ensemble $\{X(B) : \|B\| \leq \frac{1}{8}\}$ est connexe par arcs. (1 point)
- h. Montrez que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$. (1 point)
- i. Soit $\mathcal{S} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^2 = I_n\}$. Montrez que $\mathcal{S}$ est fermé, que la trace d'un élément de $\mathcal{S}$ appartient à $\{n - 2q : 0 \leq q \leq n\}$, puis que $\mathcal{S}$ n'est pas connexe. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : partiel de topologie des espaces normés

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Espaces vectoriels normés](#) » en L3 et « [Compacité et connexité](#) » en L3 et « [Complétude et point fixe](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces vectoriels normés](#), [compacité et connexité](#), [complétude et point fixe](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : normes équivalentes et norme subordonnée](#)
- [Contrôle de maths L3 : compacité, théorème de Heine et connexité](#)
- [Contrôle de maths L3 : complétude, espaces de Banach et point fixe](#)