

Contrôle de maths L3 : partiel d'algèbre : groupes, anneaux et corps

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitres** : Groupes : quotients et actions de groupes + Anneaux, idéaux et arithmétique + Corps, extensions et corps finis
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 7 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : restituer les démonstrations fondamentales sur groupes, anneaux et corps
 - Calculer : déterminer idéaux, nilpotents et inversibles d'un anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
 - Chercher : exploiter une action de groupe pour construire un morphisme et un quotient
 - Modéliser : relier polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_3[X]$ et corps finis
 - Raisonner : dénombrer des polynômes irréductibles par factorisation de $X^q - X$

Exercice 1 : Questions de cours (4 points)

Calculatrice interdite.

Les anneaux sont commutatifs et unitaires.

- Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble X , et $x \in X$. Énoncez et démontrez la relation entre le cardinal de l'orbite de x et son stabilisateur. (1,5 point)
- Démontrez qu'un anneau intègre fini est un corps. (1,5 point)

- c. Soit K un corps fini. Montrez que sa caractéristique est un nombre premier p , puis que son cardinal est une puissance de p . (1 point)

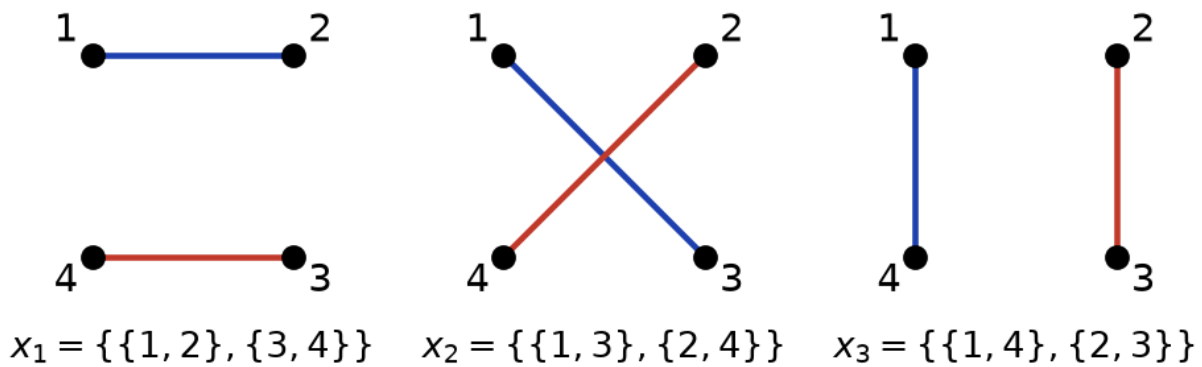
Exercice 2 : Idéaux, nilpotents et inversibles de $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$ (5 points)

On note $A = \mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$. On admet que les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les idéaux $(\bar{d})$, où d décrit les diviseurs positifs de n .

- Montrez que $\bar{k}$ est inversible dans A si et seulement si $\text{pgcd}(k, 45) = 1$. (1 point)
- Par l'algorithme d'Euclide, déterminez l'inverse de $\bar{7}$ dans A . (1 point)
- Donnez la liste des idéaux de A et précisez les idéaux maximaux. Déterminez ensuite l'ensemble des éléments nilpotents de A . (1,5 point)
- Calculez le cardinal du groupe A^* des inversibles. Montrez que $x^{12} = \bar{1}$ pour tout $x \in A^*$, et déduisez-en que A^* n'est pas cyclique. Donnez enfin un élément d'ordre 12. (1,5 point)

Exercice 3 : Action de S_4 sur les appariements (4 points)

Il y a trois façons de répartir les éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$ en deux paires. On note $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ l'ensemble de ces appariements, représentés ci-dessous.



Pour $\sigma \in \mathcal{S}_4$, on pose $\sigma \cdot \{\{a, b\}, \{c, d\}\} = \{\{\sigma(a), \sigma(b)\}, \{\sigma(c), \sigma(d)\}\}$.

- Vérifiez que cette formule définit une action de $\mathcal{S}_4$ sur X . (0,5 point)
- Déterminez l'orbite de x_1 . Déduisez-en l'ordre de son stabilisateur, puis donnez la liste de ses éléments. (1 point)
- L'action définit un morphisme $\rho : \mathcal{S}_4 \rightarrow \mathcal{S}(X)$. Montrez que son noyau est le groupe $V_4 = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$. (1,5 point)
- Déduisez-en que V_4 est distingué dans $\mathcal{S}_4$ et que $\mathcal{S}_4 / V_4$ est isomorphe à $\mathcal{S}_3$. (1 point)

Exercice 4 : Problème : polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_3$ et corps à 9 éléments (7 points)

On admet que le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique.

Partie A : un corps à 9 éléments

- Montrez que $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$. On pose $K = \mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1)$ et

on note i la classe de X . Justifiez que K est un corps à 9 éléments. (1 point)

- b. L'élément i engendre-t-il K^* ? Montrez que $1 + i$ est un générateur de K^* et dressez le tableau de ses puissances. (1,5 point)
- c. Déterminez le polynôme minimal de $1 + i$ sur $\mathbb{F}_3$. Déduisez-en que K est isomorphe à $\mathbb{F}_3[X]/(X^2 + X + 2)$. (1 point)

Partie B : dénombrement de polynômes irréductibles

- d. Déterminez tous les polynômes unitaires irréductibles de degré 2 de $\mathbb{F}_3[X]$. (1 point)
- e. Soit Q un polynôme unitaire irréductible de degré d de $\mathbb{F}_3[X]$. Montrez que Q divise $X^9 - X$ si et seulement si $d \in \{1, 2\}$. Déduisez-en que $X^9 - X$ est le produit des polynômes unitaires irréductibles de degré 1 ou 2, et contrôlez les degrés. (1,5 point)
- f. En adaptant la méthode à $X^{27} - X$, déterminez le nombre de polynômes unitaires irréductibles de degré 3 de $\mathbb{F}_3[X]$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : partiel d'algèbre : groupes, anneaux et corps

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Groupes et actions](#) » en L3 et « [Anneaux et idéaux](#) » en L3 et « [Corps et extensions](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [groupes et actions](#), [anneaux et idéaux](#), [corps et extensions](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : groupes quotients et actions de groupes](#)
- [Contrôle de maths L3 : anneaux, idéaux et polynômes irréductibles](#)
- [Contrôle de maths L3 : extensions de corps et corps finis](#)