

Contrôle de maths L3 : normes équivalentes et norme subordonnée

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Espaces normés et applications linéaires continues
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer la caractérisation des applications linéaires continues
 - Chercher : construire une suite de fonctions qui sépare deux normes
 - Calculer : obtenir une norme subordonnée par majoration puis suite réalisant l'égalité
 - Communiquer : distinguer clairement dimension finie et dimension infinie

Exercice 1 : Question de cours, applications linéaires continues (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 2 heures.

Dans tout le sujet, les espaces vectoriels sont réels. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- a. Démontrez l'équivalence des trois propriétés suivantes : (i) u est continue sur E ; (ii) u est continue en 0 ; (iii) il existe $C \geq 0$ tel que $\|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$ pour tout $x \in E$. (2,5 points)

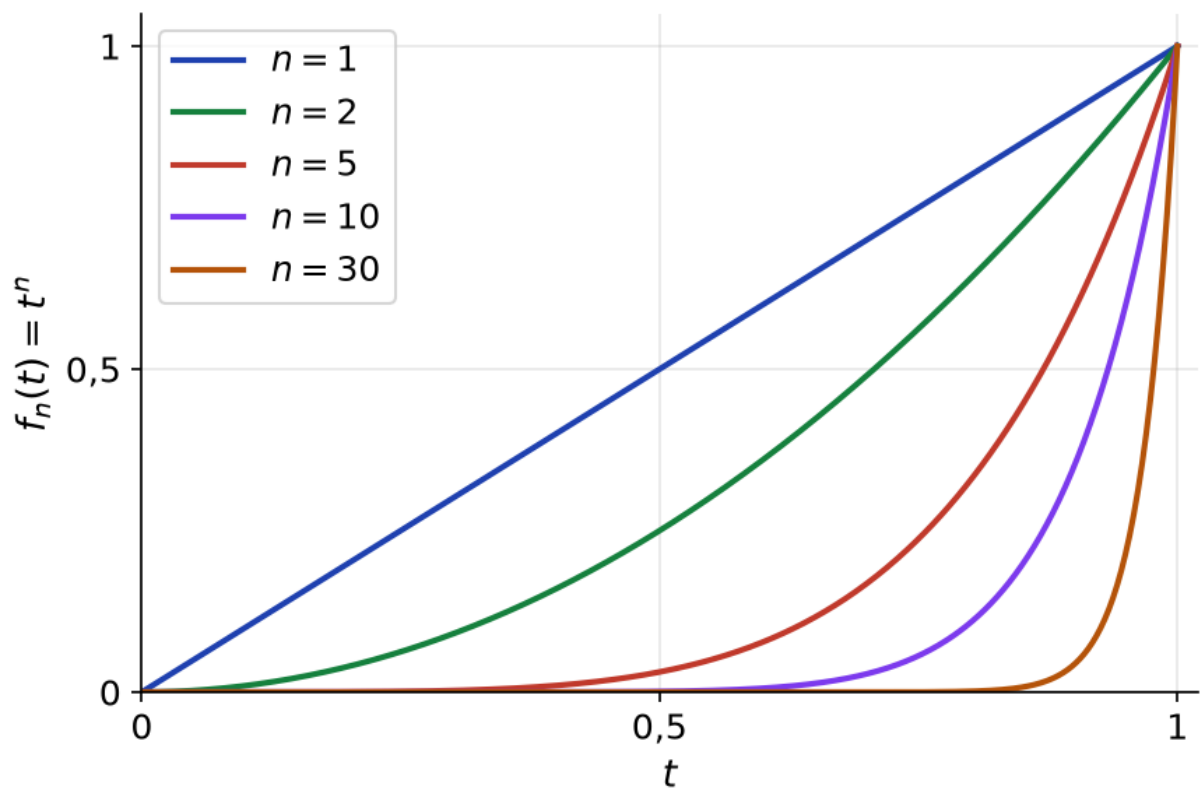
- b. Lorsque u est continue, on pose $\|u\| = \sup \left\{ \frac{|u(x)|_F}{|x|_E} : x \neq 0 \right\}$. Montrez que $\|u\| = \sup \{ |u(x)|_F : |x|_E = 1 \}$ (si $E \neq \{0\}$), puis que $\|v \circ u\| \leq \|v\| \|u\|$ pour toute application linéaire continue v de F dans un troisième espace normé G . (1,5 point)

Exercice 2 : Trois normes sur $C([0,1])$ (4 points)

On note $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et, pour $f \in E$:

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad N_2(f) = \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{1/2}, \quad N_\infty(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

On admet que ce sont trois normes sur E . Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(t) = t^n$.



- a. Montrez que $N_1(f) \leq N_2(f) \leq N_\infty(f)$ pour tout $f \in E$. (1 point)

- b. Calculez $N_1(f_n)$, $N_2(f_n)$ et $N_\infty(f_n)$. (1 point)
- c. Déduisez-en que deux quelconques de ces trois normes ne sont pas équivalentes. (1 point)
- d. Montrez que la suite (f_n) converge vers la fonction nulle pour N_1 et pour N_2 , mais qu'elle ne converge vers aucune fonction de E pour N_∞ . (1 point)

Exercice 3 : Calculs de normes subordonn es (4 points)

Partie A. On munit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ de la norme N_∞ . Pour $g \in E$ fix e, on définit la forme linéaire $\varphi_g : f \rightarrow \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

- a. Montrez que φ_g est continue et que $\|\varphi_g\| \leq N_1(g)$. En utilisant, pour $\varepsilon > 0$, la fonction $f_\varepsilon = \frac{g}{|g| + \varepsilon}$, montrez que $\|\varphi_g\| = N_1(g)$. (1,5 point)
- b. Dans le cas $g(t) = t - \frac{1}{2}$, calculez $\|\varphi_g\|$ et montrez qu'il n'existe aucune fonction $f \in E$ telle que $N_\infty(f) \leq 1$ et $\varphi_g(f) = \|\varphi_g\|$. (1 point)

Partie B. On note ℓ^1 l'espace des suites réelles $x = (x_n)_n \in \mathbb{N}$ telles que

$$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty. \text{ Soit } a = (a_n) \text{ une suite réelle born e ; on note } \|a\|_\infty = \sup_n |a_n|.$$

- c. Montrez que $M_a : x \rightarrow (a_n x_n)_n \in \mathbb{N}$ est un endomorphisme continu de $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ et que $\|M_a\| = \|a\|_\infty$. (1,5 point)

Exercice 4 : Formes linéaires sur les polynômes (3 points)

Pour $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_1 = \sum_{k=0}^d |a_k|$, qui définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

- Montrez que la forme linéaire $\varphi : P \rightarrow P(1)$ est continue sur $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1)$ et calculez sa norme subordonnée. (1 point)
- Montrez que la forme linéaire $\psi : P \rightarrow P'(1)$ n'est pas continue sur $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1)$. (1 point)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifiez que la restriction de ψ à $\mathbb{R}_n[X]$ est continue quelle que soit la norme choisie sur $\mathbb{R}_n[X]$, et calculez sa norme subordonnée lorsque $\mathbb{R}_n[X]$ est muni de $\|\cdot\|_1$. (1 point)

Exercice 5 : Problème, l'opérateur de Volterra (5 points)

On note toujours $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et on définit, pour $f \in E$, la fonction $V(f)$ par

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ pour } x \in [0,1].$$

- Justifiez que V est un endomorphisme de E , continu pour N_∞ , et que sa norme subordonnée pour N_∞ vaut 1. (1 point)
- Montrez par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, tout $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$,
 $|V^n(f)(x)| \leq \frac{x^n}{n!} N_\infty(f)$. Déduisez-en la norme subordonnée de V^n pour N_∞ . (1,5 point)
- On munit maintenant E de la norme N_1 . À l'aide d'une intégration par parties, montrez que
 $N_1(V(f)) \leq \int_0^1 (1-t)|f(t)| dt$, puis que V est continue pour N_1 avec une norme subordonnée égale à 1. On pourra utiliser les fonctions $h_k(t) = \max\left(0, \frac{1}{2k}(1-kt)\right)$ pour $k \geq 1$. (1,5 point)
- On note $C^1([0,1])$ le sous-espace des fonctions de classe C^1 , muni de N_∞ . Montrez que l'application de dérivation $D : f \rightarrow f'$, de $C^1([0,1])$ dans (E, N_∞) , n'est pas continue.

(1 point)



Réviser avant le contrôle : normes équivalentes et norme subordonnée

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Espaces vectoriels normés](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces vectoriels normés](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : partiel de topologie des espaces normés](#)