

Contrôle de maths L3 : modes de convergence, Borel-Cantelli et TCL

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Convergences, grands nombres et central limite
- **Durée conseillée** : 2 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3,5 points ; exercice 2 : 4,5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Communiquer : énoncer les lemmes de Borel-Cantelli, la loi faible des grands nombres et le théorème central limite avec leurs hypothèses exactes
 - Raisonner : construire des contre-exemples qui séparent les différents modes de convergence
 - Modéliser : traduire une question sur des lancers de pièce en événements et appliquer Borel-Cantelli
 - Calculer : obtenir une convergence en loi par le théorème de Lévy et une approximation par le TCL

Exercice 1 : Question de cours : Borel-Cantelli et convergence L^p (3,5 points)

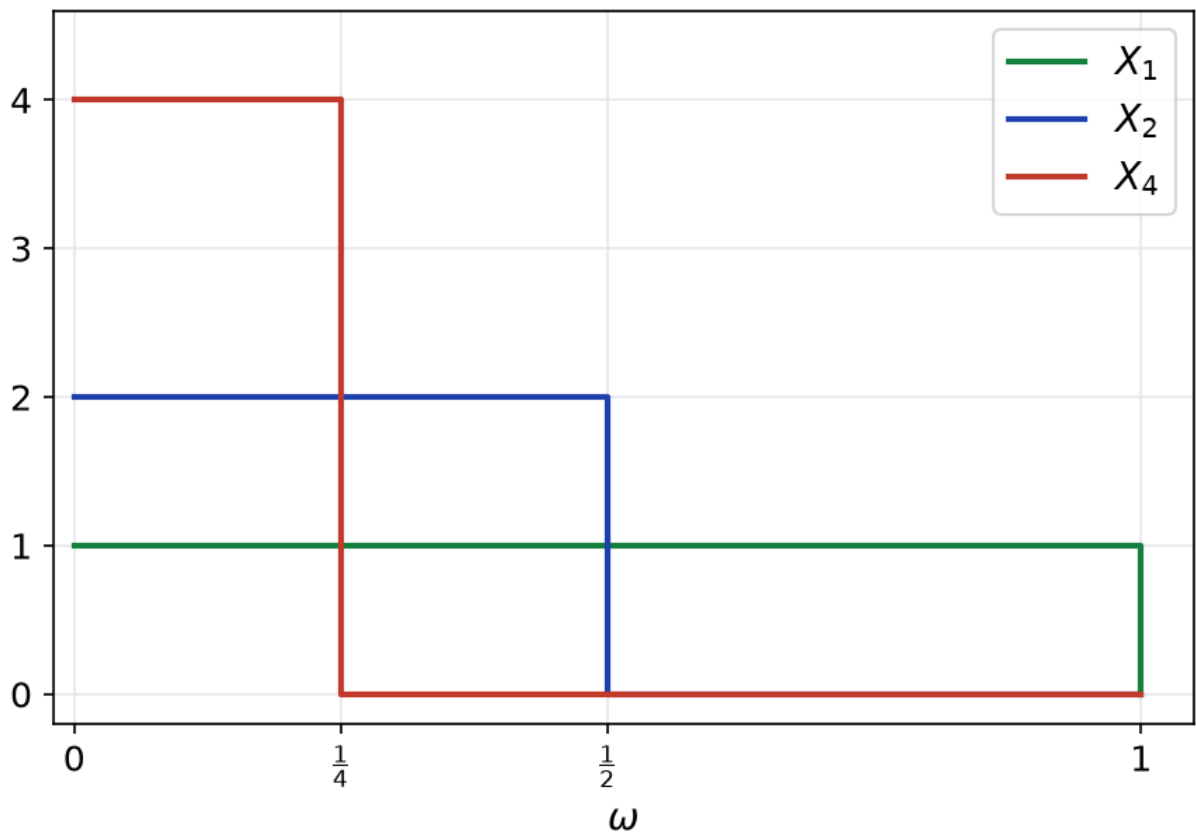
Calculatrice interdite. Documents interdits.

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour une suite d'événements (A_n) , on note $\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$.

- Énoncez les deux lemmes de Borel-Cantelli, avec leurs hypothèses exactes. (1 point)
- Démontrez le premier lemme de Borel-Cantelli. (1,5 point)
- Soit $p \geq 1$. Démontrez que la convergence dans L^p entraîne la convergence en probabilité. (1 point)

Exercice 2 : Des exemples qui séparent les convergences (4,5 points)

- On munit $\Omega = [0, 1]$ de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. On pose $X_n = n 1_{[0, 1/n]}$ pour $n \geq 1$. Montrez que (X_n) converge vers 0 presque sûrement et en probabilité, mais pas dans L^1 . (1,5 point)



- Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes, avec Y_n de loi de Bernoulli de

paramètre $\frac{1}{n}$. Montrez que (Y_n) converge vers 0 dans L^p pour tout $p \geq 1$, mais qu'elle ne converge pas presque sûrement. (1,5 point)

- c. Soit Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $Z_n = (-1)^n Z$. Montrez que (Z_n) converge en loi vers Z , mais pas en probabilité. (1,5 point)

Exercice 3 : Longues séries de pile (4 points)

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On modélise les lancers par une suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ de variables indépendantes, avec $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = 0) = \frac{1}{2}$. L'issue $\varepsilon_k = 1$ signifie « pile au lancer k ».

- Pour $n \geq 2$, on pose $\ell_n = \lceil 2 \log_2 n \rceil$ et A_n l'événement « les lancers $n, n+1, \dots, n + \ell_n - 1$ donnent tous pile ». Montrez que, presque sûrement, seul un nombre fini d'événements A_n se réalisent. (1,5 point)
- Soit $\ell \geq 1$ un entier fixé. Montrez que, presque sûrement, on observe une infinité de séries d'au moins ℓ piles consécutifs. On pourra découper les lancers en blocs disjoints de longueur ℓ . (1,5 point)
- Montrez que, presque sûrement, il existe pour tout entier ℓ une infinité de séries d'au moins ℓ piles consécutifs. Comparez avec la question a). (1 point)

Exercice 4 : Loi faible des grands nombres et loi de Poisson (4 points)

- Énoncez et démontrez la loi faible des grands nombres dans L^2 à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Précisez les hypothèses. (1,5 point)
- Soit $\lambda > 0$ et, pour $n > \lambda$, S_n de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. Calculez la fonction caractéristique de S_n et celle de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. (1 point)
- On admet que $|a^n - b^n| \leq n|a - b|$ pour tous complexes a, b de module au plus 1. Montrez

que $\varphi_{S_n}(t)$ tend vers $\exp(\lambda(e^{it} - 1))$. Concluez avec le théorème de Lévy, que vous énoncerez. (1,5 point)

Exercice 5 : Problème : approximation par le théorème central limite (4 points)

On reprend les lancers (ε_k) de l'exercice 3 et on note $S_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$ le nombre de piles en n lancers. On note Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On donne $\Phi(1,96) \approx 0,975$ et $\Phi(2) \approx 0,977$.

- Énoncez le théorème central limite avec ses hypothèses exactes. (1 point)
- On prend $n = 10\,000$. Par quelle loi peut-on approcher celle de $\frac{S_n - 5\,000}{50}$? Justifiez. (0,5 point)
- Donnez une valeur approchée de $\mathbb{P}(4\,900 \leq S_n \leq 5\,100)$. Justifiez le passage à la limite. (1 point)
- Minorez la même probabilité par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Comparez les deux résultats. (1 point)
- À l'aide du théorème central limite, déterminez un nombre de lancers n à partir duquel la fréquence de pile est à moins de 0,01 de $\frac{1}{2}$ avec une probabilité d'environ 0,95. (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : modes de convergence, Borel-Cantelli et TCL

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Loi des grands nombres et TCL](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [loi des grands nombres et tcl](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : partiel final : intégration et probabilités](#)