

Contrôle de maths L3 : loi d'un vecteur aléatoire et indépendance

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Espaces probabilisés, variables aléatoires et espérance
- **Durée conseillée** : 2 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3,5 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5,5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : obtenir la loi d'une fonction de variables aléatoires par la méthode de la fonction muette
 - Modéliser : effectuer un changement de variables avec jacobien pour trouver la loi d'un couple
 - Raisonner : établir ou réfuter l'indépendance par factorisation des densités ou des fonctions caractéristiques
 - Calculer : déterminer une espérance conditionnelle dans un cas à densité et vérifier sa propriété caractéristique

Exercice 1 : Question de cours : fonction muette et indépendance (3,5 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour une variable réelle X , on note $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ sa fonction caractéristique.

- Énoncez la méthode de la fonction muette : à quelle condition un vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ admet-il une densité f ? (1 point)
- Soit (X, Y) un couple de densité $f_{(X,Y)}$, de densités marginales f_X et f_Y . Énoncez le critère d'indépendance de X et Y portant sur les densités. (1 point)
- Démontrez que, si X et Y sont indépendantes, alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$. Énoncez ensuite la caractérisation de l'indépendance par la fonction caractéristique du couple. (1,5 point)

Exercice 2 : Loi du carré et loi du minimum (4 points)

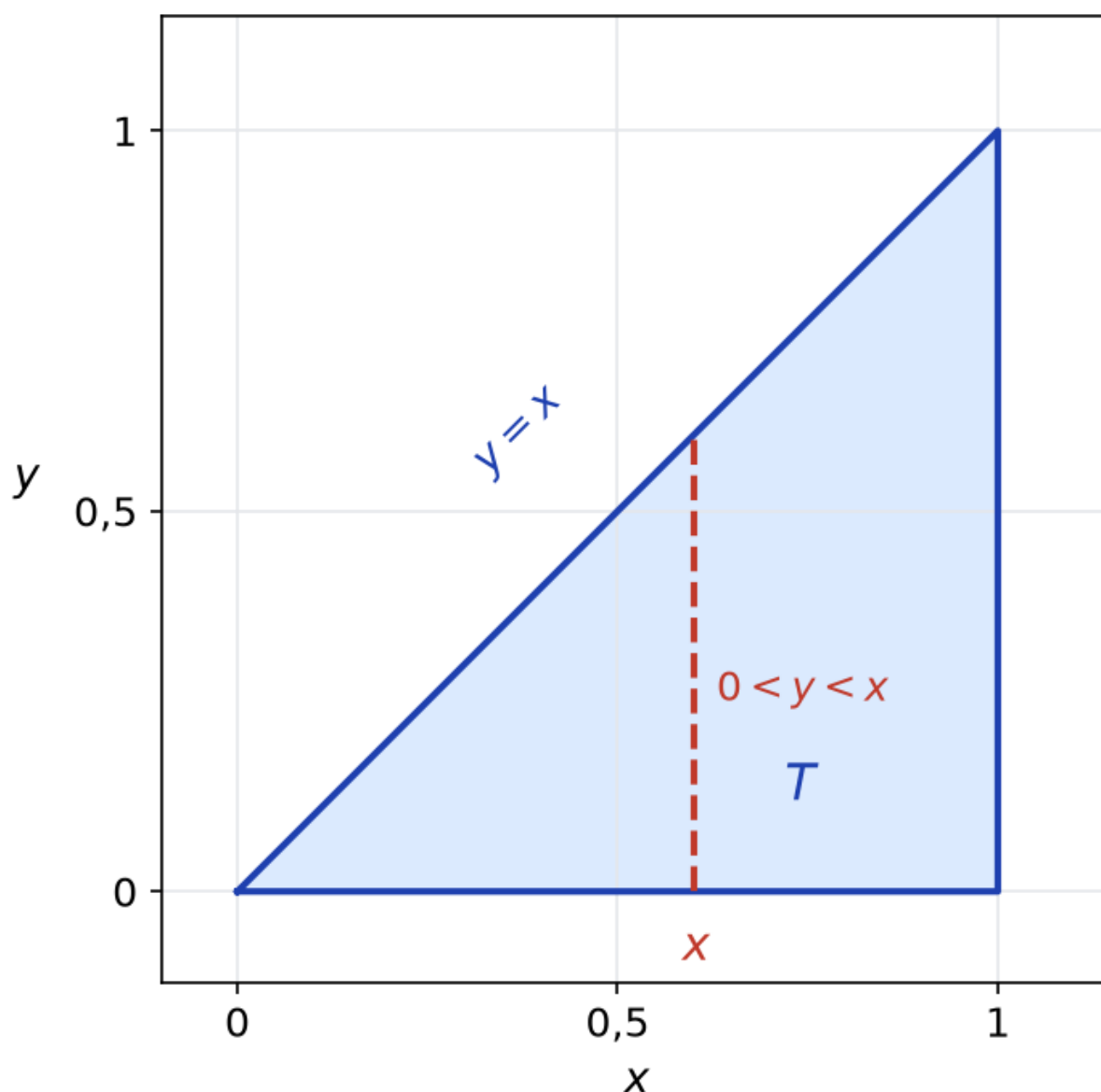
- Soit X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminez, par la méthode de la fonction muette, une densité de X^2 . (2 points)
- Soient X et Y indépendantes, de lois exponentielles de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On pose $M = \min(X, Y)$. Déterminez la loi de M par la méthode de la fonction muette. (1 point)
- Avec les mêmes variables, calculez $\mathbb{P}(X < Y)$. (1 point)

Exercice 3 : Fonctions caractéristiques et vecteur gaussien (4 points)

- Calculez la fonction caractéristique d'une variable de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. (1 point)
- Soient X et Y indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1. Calculez φ_{X-Y} . Montrez que $X - Y$ a pour densité $z \rightarrow \frac{1}{2}e^{-|z|}$. (1,5 point)
- Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Donnez sa fonction caractéristique. Montrez ensuite que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes, et précisez leurs lois. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? (1,5 point)

Exercice 4 : Espérance conditionnelle sur un triangle (3 points)

Soit (X, Y) un couple de densité $f(x, y) = 2 \times 1_T(x, y)$, où $T = \{(x, y) : 0 < y < x < 1\}$.



- Déterminez les densités marginales de X et de Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? (1 point)
- Déterminez la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$, pour $0 < x < 1$. Déduisez-en $\mathbb{E}[Y | X]$, puis vérifiez la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle. (1,5 point)

c. Calculez $\mathbb{E}[Y]$ de deux façons. (0,5 point)

Exercice 5 : Problème : lois gamma et changement de variables (5,5 points)

Pour $a > 0$, la loi $\Gamma(a, 1)$ a pour densité $x \mapsto \frac{x^{a-1}e^{-x}}{\Gamma(a)}1_{]0, +\infty[}(x)$, où

$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x} dx$. Soient $a, b > 0$, et X, Y indépendantes de lois respectives $\Gamma(a, 1)$ et $\Gamma(b, 1)$. On pose :

$$S = X + Y \text{ et } T = \frac{X}{X + Y}.$$

a. Donnez une densité du couple (X, Y) . (0,5 point)

b. Montrez que $\phi : (x, y) \mapsto \left(x + y, \frac{x}{x+y}\right)$ est un C^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[^2$ sur $]0, +\infty[\times]0, 1[$. Calculez la valeur absolue du jacobien de sa réciproque. (1,5 point)

c. Déterminez une densité du couple (S, T) . Déduisez-en que S et T sont indépendantes, que S suit la loi $\Gamma(a + b, 1)$, et donnez la loi de T . Établissez au passage l'égalité

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \text{ (2 points)}$$

d. Calculez $\mathbb{E}[X]$, puis déduisez $\mathbb{E}[T]$ de l'égalité $X = ST$. (1 point)

e. Que devient le résultat pour $a = b = 1$? Interprétez-le pour deux durées exponentielles indépendantes. (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : loi d'un vecteur aléatoire et indépendance

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Variables aléatoires et espérance](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [variables aléatoires et espérance](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : partiel final : intégration et probabilités](#)