

Contrôle de maths L3 : inversion locale et fonctions implicites

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Inversion locale, fonctions implicites et extrema liés
- **Durée conseillée** : 2 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Communiquer : énoncer avec précision les théorèmes d'inversion locale, d'inversion globale et des fonctions implicites
 - Raisonner : vérifier l'injectivité et la surjectivité avant de conclure à un difféomorphisme global
 - Calculer : obtenir les dérivées première et seconde d'une fonction implicite et l'équation d'une tangente
 - Représenter : relier une courbe implicite, ses points singuliers et ses tangentes à un tracé

Exercice 1 : Question de cours : inversion locale et fonctions implicites (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

- a. Énoncez le théorème d'inversion locale pour une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. (1,5 point)
- b. Énoncez le théorème des fonctions implicites pour une fonction $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, au voisinage d'un point (a,b) tel que $F(a,b) = 0$. (1,5 point)

- c. Dans la situation de b), on note φ la fonction implicite. En dérivant la relation $F(x, \varphi(x)) = 0$, exprimez $\varphi'(x)$ à l'aide des dérivées partielles de F . (1 point)

Exercice 2 : Coordonnées polaires (4 points)

On considère l'application $P : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, où $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, définie par $P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- Calculez la matrice jacobienne de P et son déterminant. Montrez que P est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U . (1 point)
- L'application P est-elle un difféomorphisme de U sur son image ? Justifiez. (1 point)
- On pose $V =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$. Montrez que la restriction de P à V est injective. Déterminez $P(V)$, puis montrez que P réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de V sur $P(V)$ en citant le théorème utilisé. (2 points)

Exercice 3 : Un difféomorphisme global du plan (4 points)

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne et on considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2} \sin y \\ y + \frac{1}{2} \sin x \end{pmatrix}.$$

On écrit $f = \text{id} + g$, avec $g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin y \\ \frac{1}{2} \sin x \end{pmatrix}$.

- Calculez le déterminant jacobien de f et montrez qu'il est minoré par $\frac{3}{4}$. Que peut-on en déduire localement ? (1 point)
- Montrez que g est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne, puis que $|f(u) - f(v)| \geq \frac{1}{2}|u - v|$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}^2$. Déduisez-en que f est injective. (1 point)
- Soit $w \in \mathbb{R}^2$. En étudiant l'application $T : u \rightarrow w - g(u)$, montrez que l'équation $f(u) = w$ admet une solution. (1 point)
- Concluez que f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, puis calculez la matrice de $d(f^{-1})(0,0)$. (1 point)

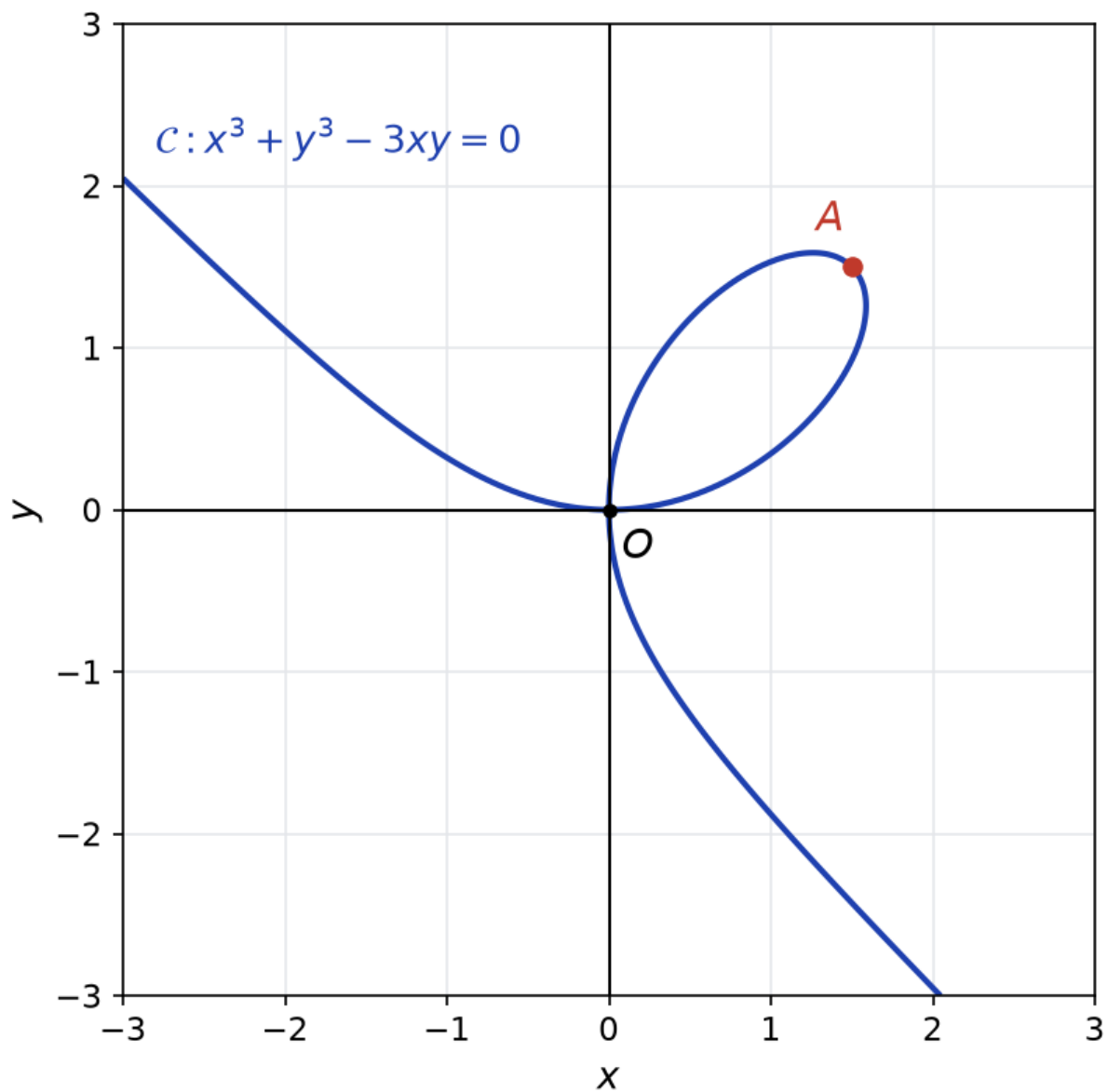
Exercice 4 : Plan tangent à un hyperboloïde (3 points)

On considère la surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ et le point $a = (1, 1, 1)$.

- Montrez que S est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, de classe $\mathcal{C}^\infty$. (1 point)
- Vérifiez que $a \in S$. Déterminez l'espace tangent $T_a S$, puis une équation du plan tangent affine à S en a . (1 point)
- Montrez que la droite passant par a et dirigée par $u = (1, 0, 1)$ est entièrement contenue dans S . Vérifiez la cohérence avec b). (1 point)

Exercice 5 : Problème : le folium de Descartes (5 points)

On pose $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $F(x, y) = 0$, tracée ci-dessous avec le point $A = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.



- a. Déterminez les points de C en lesquels $\frac{\partial F}{\partial y}$ s'annule. (1 point)
- b. Vérifiez que $A \in C$. Justifiez l'existence d'une fonction implicite φ de classe C^∞ au voisinage de $\frac{3}{2}$, telle que $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$. Calculez $\varphi'\left(\frac{3}{2}\right)$ et donnez l'équation de la tangente à C en A . (1,5 point)
- c. Calculez $\varphi''\left(\frac{3}{2}\right)$. Précisez la position de C par rapport à sa tangente au voisinage de A . (1,5 point)
- d. Pour $t \neq -1$, on pose $M(t) = \begin{pmatrix} \frac{3t}{1+t^3} \\ \frac{3t^2}{1+t^3} \end{pmatrix}$. Vérifiez que $M(t) \in C$. En étudiant $M(t)$

quand $t \rightarrow 0$ et quand $t \rightarrow +\infty$, expliquez pourquoi $\mathcal{C}$ n'est, au voisinage de l'origine, ni un graphe $y = \varphi(x)$ ni un graphe $x = \psi(y)$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : inversion locale et fonctions implicites

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Inversion locale et extrema liés](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [inversion locale et extrema liés](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : extrema libres et multiplicateurs de Lagrange](#)