

Contrôle de maths L3 : inégalités de Hölder et espaces L^p

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Espaces L^p
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 5 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 6 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer l'inégalité de Hölder à partir de l'inégalité de Young
 - Calculer : déterminer pour quels exposants une fonction puissance est dans L^p
 - Chercher : construire des contre-exemples aux inclusions entre espaces L^p
 - Communiquer : distinguer une fonction de sa classe presque partout égale

Exercice 1 : Question de cours, de Young à Hölder (5 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 2 heures.

Dans tout le sujet, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, λ la mesure de Lebesgue, et L^p désigne l'espace des classes de fonctions mesurables égales presque partout dont la puissance p -ième du module est intégrable. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- a. Démontrez l'inégalité de Young : pour tous réels $a, b \geq 0$, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. On pourra utiliser la concavité du logarithme. (1,5 point)

- b. Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables. Démontrez l'inégalité de Hölder $\int_X |f g| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$, en traitant à part les cas où l'une des normes est nulle ou infinie. (2 points)
- c. Quel cas particulier obtient-on pour $p = q = 2$? Déduisez-en que, pour toute $f \in L^2([0, 1])$, on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$. (1,5 point)

Exercice 2 : Inégalité de Jensen sur un espace de probabilité (4 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, et Y une variable aléatoire intégrable telle que $\varphi(Y)$ soit intégrable.

- a. Énoncez l'inégalité de Jensen. (1 point)
- b. On admet que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe un réel c tel que $\varphi(y) \geq \varphi(m) + c(y - m)$ pour tout réel y (droite d'appui). Démontrez l'inégalité de Jensen. Où utilise-t-on que $P(\Omega) = 1$? (1,5 point)
- c. Déduisez-en que $(E|Y|^r)^{1/r} \leq E(|Y|^r)^{1/r}$ pour $r \geq 1$ lorsque $|Y|^r$ est intégrable, puis que, pour des réels $a_1, \dots, a_n > 0$, $(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$. (1,5 point)

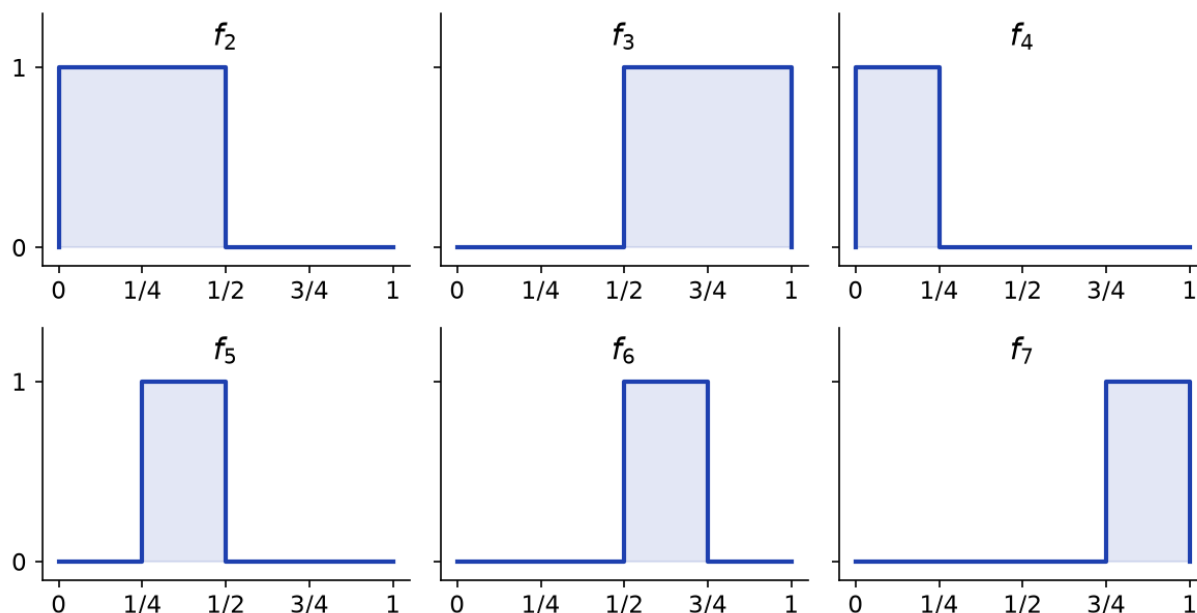
Exercice 3 : Inclusions entre espaces L_p (5 points)

- a. Soient $1 \leq p < q < +\infty$. Montrez que, pour toute f mesurable sur $[0, 1]$, $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ (appliquez Hölder à $|f|^p \times 1$ avec l'exposant $\frac{q}{p}$). Déduisez-en $L^q([0, 1]) \subset L^p([0, 1])$, puis traitez le cas $q = +\infty$. (2 points)
- b. Pour $\alpha > 0$, on pose $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$ sur $]0, 1]$. Déterminez les $p \geq 1$ tels que $f_\alpha \in L^p([0, 1])$. Montrez que l'inclusion de a) est stricte lorsque $p < q < +\infty$. (1 point)
- c. On se place sur $\mathbb{R}$ muni de λ . Montrez que $g = \frac{1}{x} 1_{[1, +\infty[}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$ mais pas

à $L^1(\mathbb{R})$, et que $h = x^{-1/2} 1_{]0,1]}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ mais pas à $L^2(\mathbb{R})$. Que peut-on en conclure ? (2 points)

Exercice 4 : Problème, la bosse glissante et l'extraction presque partout (6 points)

Tout entier $n \geq 1$ s'écrit de façon unique $n = 2^k + j$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j < 2^k$. On pose $I_n = \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right]$ et $f_n = 1_{I_n}$ sur $[0, 1]$. La figure montre f_2 à f_7 : la « bosse » parcourt $[0, 1]$, puis recommence deux fois plus étroite.



- Soit $1 \leq p < +\infty$. Calculez $|f_n|_p$ et montrez que $f_n \rightarrow 0$ dans $L^p([0, 1])$. Est-ce encore vrai dans L^∞ ? (1,5 point)
- Montrez que, pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))$ prend une infinité de fois la valeur 1 et une infinité de fois la valeur 0. Expliquez pourquoi modifier chaque f_n sur un ensemble négligeable ne change pas la conclusion : (f_n) ne converge presque partout vers aucune fonction. (1,5 point)
- Exhibez une sous-suite de (f_n) qui converge vers 0 presque partout. (1 point)

- d. Soient $1 \leq p < +\infty$ et (g_n) une suite de $L^p(X, \mu)$ qui converge vers g dans L^p . Montrez qu'il existe une suite strictement croissante (n_k) telle que $\|g_{n_k} - g\|_p \leq 2^{-k}$, puis que $S = \sum_{k \geq 1} |g_{n_k} - g|$ vérifie $\|S\|_p \leq 1$. Concluez que $g_{n_k} \rightarrow g$ presque partout. (2 points)



Réviser avant le contrôle : inégalités de Hölder et espaces L^p

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Espaces \$L^p\$](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces \$L^p\$](#) .

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).