

Contrôle de maths L3 : groupes quotients et actions de groupes

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Groupes : quotients et actions de groupes
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer le premier théorème d'isomorphisme et ses conséquences
 - Calculer : déterminer centre, sous-groupes distingués et quotients de petits groupes
 - Chercher : exploiter orbites, stabilisateurs et formule des classes
 - Modéliser : dénombrer des configurations par la formule de Burnside
 - Raisonner : appliquer les théorèmes de Sylow à un groupe d'ordre 15

Exercice 1 : Question de cours : premier théorème d'isomorphisme (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans cet exercice, G et G' sont deux groupes notés multiplicativement, et $f : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupes.

- Rappelez la définition d'un sous-groupe distingué de G . Montrez ensuite que $\text{Ker } f$ est un sous-groupe distingué de G . (1 point)
- Énoncez le premier théorème d'isomorphisme, puis démontrez-le. Vous justifierez avec soin que

l'application construite est bien définie. (2 points)

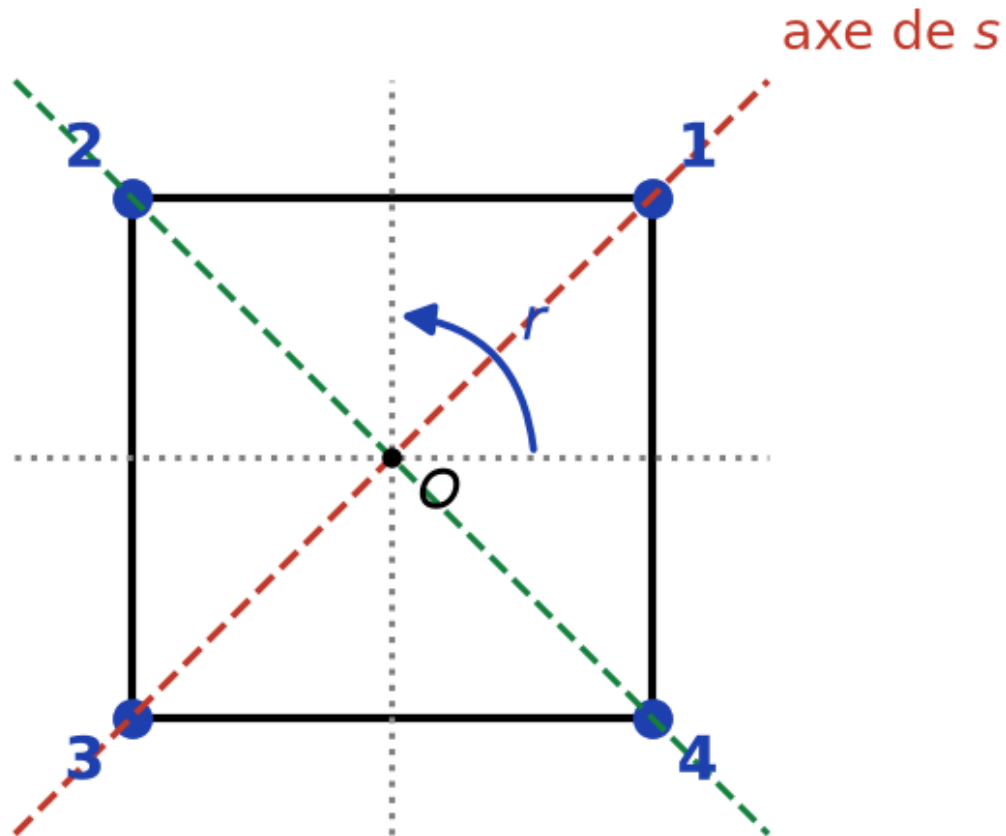
Exercice 2 : Sous-groupes distingués de S_3 et du groupe diédral D_4 (5 points)

On note S_3 le groupe symétrique de $\{1, 2, 3\}$ et A_3 son groupe alterné.

- Donnez la liste des sous-groupes de S_3 . Déterminez ensuite ceux qui sont distingués. (1,5 point)
- À l'aide de la signature, montrez que S_3 / A_3 est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (1 point)

On considère maintenant un carré de centre O , de sommets numérotés 1, 2, 3, 4 dans le sens direct. Le groupe D_4 de ses isométries est engendré par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par la symétrie s d'axe la diagonale passant par les sommets 1 et 3. On admet que

$D_4 = \{r^k, s r^k : 0 \leq k \leq 3\}$ est d'ordre 8, avec $r^4 = s^2 = e$ et $s r s = r^{-1}$.



c. Déterminez le centre $Z(D_4)$. (1 point)

d. On pose $H = \{e, r^2, s, s r^2\}$. Montrez que H est un sous-groupe distingué de D_4 , mais que $K = \{e, s\}$ ne l'est pas. Montrez enfin que le groupe quotient $D_4 / Z(D_4)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. (1,5 point)

Exercice 3 : Action par conjugaison et formule des classes (4 points)

Soit G un groupe fini. Pour $g, x \in G$, on pose $g \cdot x = g x g^{-1}$.

a. Vérifiez que cette formule définit une action de G sur lui-même. Décrivez ses orbites et le

stabilisateur d'un élément x . Établissez ensuite la formule des classes, qui relie $|G|$, $|Z(G)|$ et les indices des centralisateurs. (1,5 point)

- b. Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^n , avec $n \geq 1$. Montrez que le centre $Z(G)$ n'est pas réduit à $\{e\}$. (1,5 point)
- c. Montrez que si $G/Z(G)$ est cyclique, alors G est abélien. Déduisez-en que tout groupe d'ordre p^2 est abélien. (1 point)

Exercice 4 : Dénombrement de colliers par les orbites (4 points)

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X . Pour $g \in G$, on note

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X : g \cdot x = x\}.$$

- a. Démontrez la formule de Burnside : le nombre d'orbites est égal à $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$. Vous pourrez compter de deux façons l'ensemble des couples (g, x) tels que $g \cdot x = x$. (1,5 point)
- b. Un collier est formé de 4 perles placées aux sommets du carré de l'exercice 2. Chaque perle est rouge, verte ou bleue. Deux colliers sont considérés comme identiques lorsqu'on passe de l'un à l'autre par une isométrie de D_4 (rotation ou retournement). Combien de colliers différents peut-on former ? Présentez les points fixes dans un tableau. (2,5 points)

Exercice 5 : Problème : les groupes d'ordre 15 (4 points)

Soit G un groupe d'ordre 15.

- a. Énoncez les théorèmes de Sylow : existence, conjugaison et conditions sur le nombre n_p de p -sous-groupes de Sylow. (1 point)
- b. Montrez que G possède un unique sous-groupe P d'ordre 3 et un unique sous-groupe Q

d'ordre 5. Justifiez qu'ils sont distingués. (1 point)

c. Montrez que $P \cap Q = \{e\}$, puis que tout élément de P commute avec tout élément de Q . On pourra étudier le commutateur $x y x^{-1} y^{-1}$. (1 point)

d. Concluez : G est isomorphe à $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : groupes quotients et actions de groupes

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Groupes et actions](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [groupes et actions](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : partiel d'algèbre : groupes, anneaux et corps](#)