Contrôle de maths L3 : groupes quotients et actions de groupes

Fiche du contrôle

- **Niveau :** licence L3
- **Chapitre :** Groupes : quotients et actions de groupes
- **Durée conseillée :** 2 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : démontrer le premier théorème d'isomorphisme et ses conséquences
  - Calculer : déterminer centre, sous-groupes distingués et quotients de petits groupes
  - Chercher : exploiter orbites, stabilisateurs et formule des classes
  - Modéliser : dénombrer des configurations par la formule de Burnside
  - Raisonner : appliquer les théorèmes de Sylow à un groupe d'ordre 15

Exercice 1 : Question de cours : premier théorème d'isomorphisme (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans cet exercice, G et G' sont deux groupes notés multiplicativement, et $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes.

a. Rappelez la définition d'un sous-groupe distingué de G. Montrez ensuite que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe distingué de G. *(1 point)*

b. Énoncez le premier théorème d'isomorphisme, puis démontrez-le. Vous justifierez avec soin que

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

l'application construite est bien définie. *(2 points)*

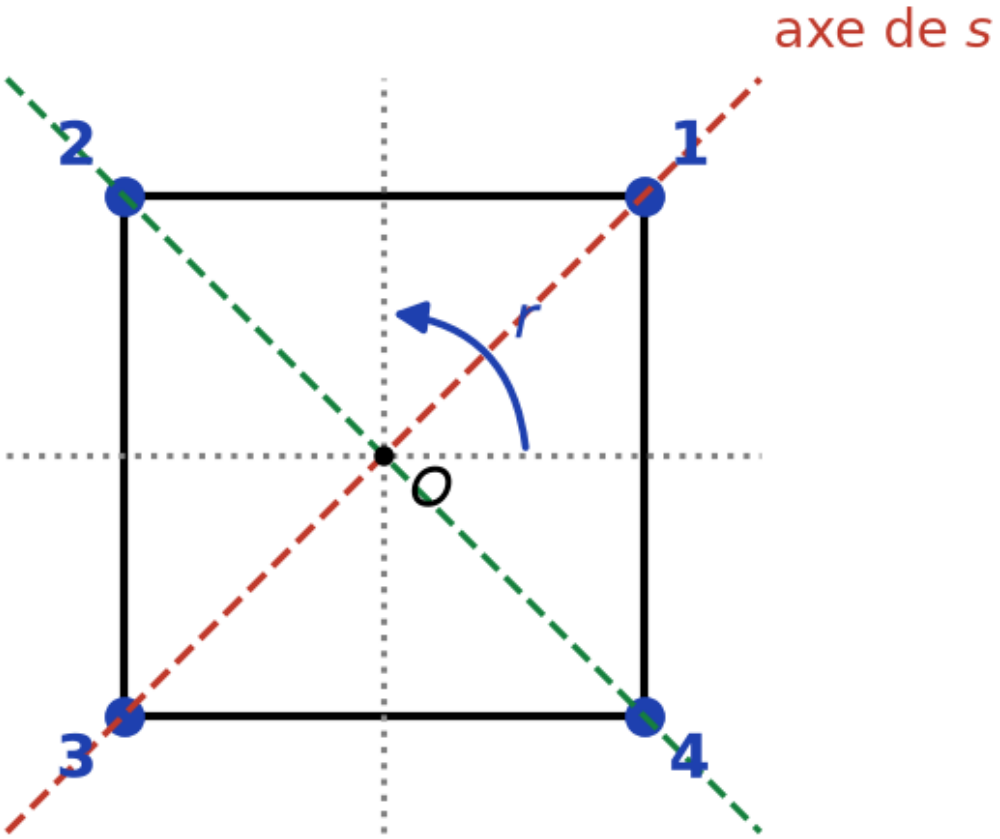
Exercice 2 : Sous-groupes distingués de S3 et du groupe diédral D4 (5 points)

On note $\mathcal{S}_3$ le groupe symétrique de $\{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{A}_3$ son groupe alterné.

a. Donnez la liste des sous-groupes de $\mathcal{S}_3$. Déterminez ensuite ceux qui sont distingués. *(1,5 point)*

b. À l'aide de la signature, montrez que $\mathcal{S}_3 \,/\, \mathcal{A}_3$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *(1 point)*

On considère maintenant un carré de centre O , de sommets numérotés 1, 2, 3, 4 dans le sens direct. Le groupe D_4 de ses isométries est engendré par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par la symétrie s d'axe la diagonale passant par les sommets 1 et 3. On admet que $D_4 = \{r^k,\ s\,k\ :\ 0\,[\backslash\text{leqeq?}]\,k \leq 3\}$ est d'ordre 8, avec $r^4 = s^2 = e$ et $s\,r\,s = r^{-1}$.



c. Déterminez le centre $Z(D_4)$. *(1 point)*

d. On pose $H = \{e, r^2, s, s\,r^2\}$. Montrez que H est un sous-groupe distingué de D_4, mais que $K = \{e, s\}$ ne l'est pas. Montrez enfin que le groupe quotient $D_4 \,/\, Z(D_4)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. *(1,5 point)*

Exercice 3 : Action par conjugaison et formule des classes (4 points)

Soit G un groupe fini. Pour $g, x \in G$, on pose $g \cdot x = g\,x\,g^{-1}$.

a. Vérifiez que cette formule définit une action de G sur lui-même. Décrivez ses orbites et le

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

stabilisateur d'un élément x. Établissez ensuite la formule des classes, qui relie $|G|$, $|Z(G)|$ et les indices des centralisateurs. *(1,5 point)*

b. Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^n, avec $n \geq 1$. Montrez que le centre $Z(G)$ n'est pas réduit à $\{e\}$. *(1,5 point)*

c. Montrez que si $G / Z(G)$ est cyclique, alors G est abélien. Déduisez-en que tout groupe d'ordre p^2 est abélien. *(1 point)*

Exercice 4 : Dénombrement de colliers par les orbites (4 points)

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Pour $g \in G$, on note $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X : g \cdot x = x\}$.

a. Démontrez la formule de Burnside : le nombre d'orbites est égal à $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$. Vous pourrez compter de deux façons l'ensemble des couples (g, x) tels que $g \cdot x = x$. *(1,5 point)*

b. Un collier est formé de 4 perles placées aux sommets du carré de l'exercice 2. Chaque perle est rouge, verte ou bleue. Deux colliers sont considérés comme identiques lorsqu'on passe de l'un à l'autre par une isométrie de D_4 (rotation ou retournement). Combien de colliers différents peut-on former ? Présentez les points fixes dans un tableau. *(2,5 points)*

Exercice 5 : Problème : les groupes d'ordre 15 (4 points)

Soit G un groupe d'ordre 15.

a. Énoncez les théorèmes de Sylow : existence, conjugaison et conditions sur le nombre n_p de p-sous-groupes de Sylow. *(1 point)*

b. Montrez que G possède un unique sous-groupe P d'ordre 3 et un unique sous-groupe Q

d'ordre 5. Justifiez qu'ils sont distingués. *(1 point)*

c. Montrez que $P \cap Q = \{e\}$, puis que tout élément de P commute avec tout élément de Q. On pourra étudier le commutateur $x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}$. *(1 point)*

d. Concluez : G est isomorphe à $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. *(1 point)*

Réviser avant le contrôle : groupes quotients et actions de groupes

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Groupes et actions » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** groupes et actions.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L3** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- Contrôle de maths L3 : partiel d'algèbre : groupes, anneaux et corps

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.