

Contrôle de maths L3 : Fubini-Tonelli et changement de variables

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Mesure produit, Fubini et changement de variables
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : justifier chaque interversion par Tonelli avant d'appliquer Fubini
 - Calculer : intégrer en coordonnées polaires grâce au jacobien
 - Représenter : dessiner le domaine d'intégration avant de le découper
 - Modéliser : exprimer un volume ou une convolution comme une intégrale double

Exercice 1 : Question de cours, les théorèmes de Fubini (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 2 heures.

Dans tout le sujet, λ_n désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et $\lambda = \lambda_1$. Les mesures considérées sont sigma-finies.

- Énoncez le théorème de Fubini-Tonelli pour une fonction mesurable positive sur un produit $X \times Y$. (1 point)
- Énoncez le théorème de Fubini pour une fonction intégrable sur $X \times Y$. (1 point)

- c. Énoncez le théorème de changement de variables dans $\mathbb{R}^n$, puis donnez le jacobien du passage en coordonnées polaires $(r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$. (1 point)

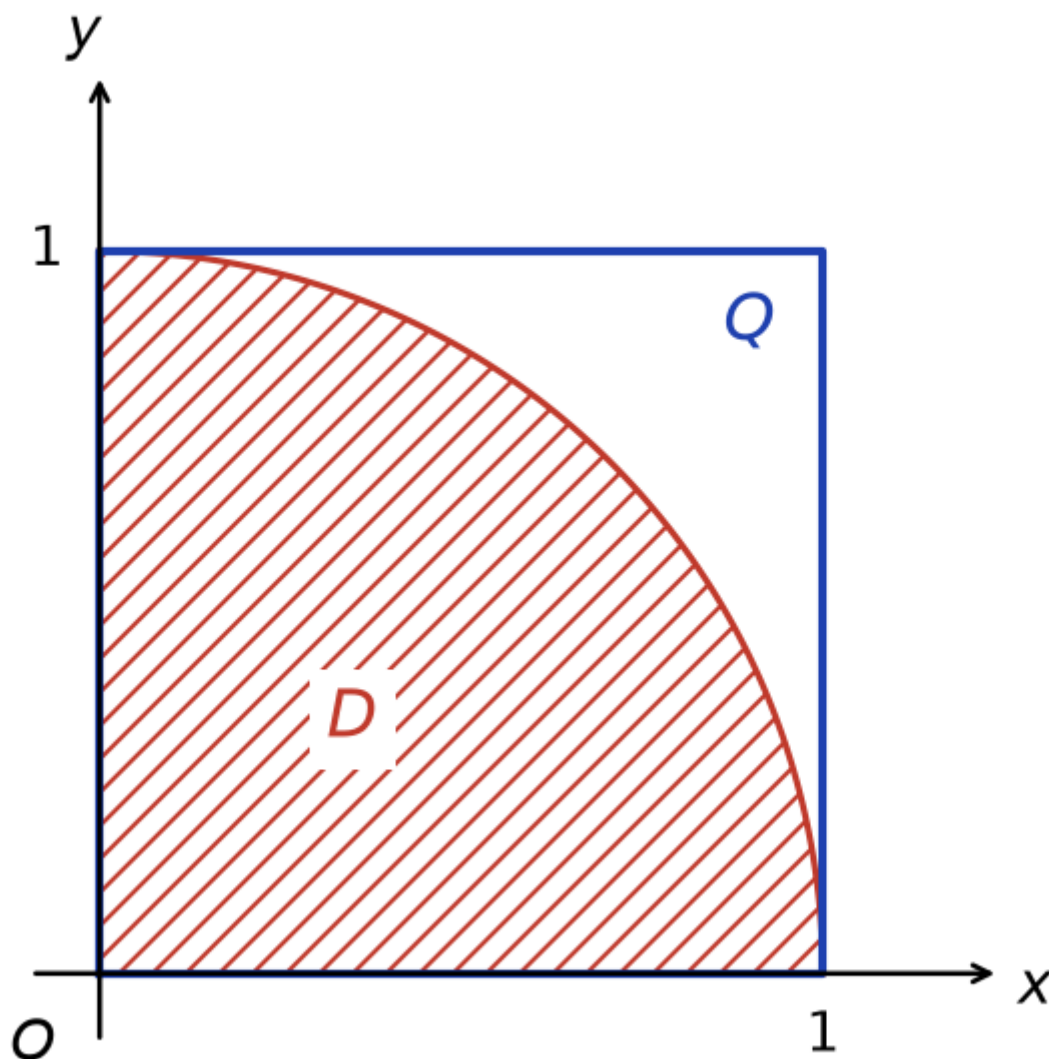
Exercice 2 : L'intégrale de Gauss par passage en polaires (4 points)

On pose $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

- a. Montrez que $x \rightarrow e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. (1 point)
- b. Montrez que $I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + y^2)} d\lambda_2(x, y)$, en citant le théorème utilisé. (1 point)
- c. À l'aide des coordonnées polaires, calculez cette intégrale double et déduisez-en I . Précisez l'ouvert de départ, l'ouvert d'arrivée et la partie négligeable de $\mathbb{R}^2$ qui est laissée de côté. (2 points)

Exercice 3 : Deux intégrales itérées différentes (4 points)

Sur le carré $Q =]0, 1]^2$, représenté ci-dessous, on considère $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.



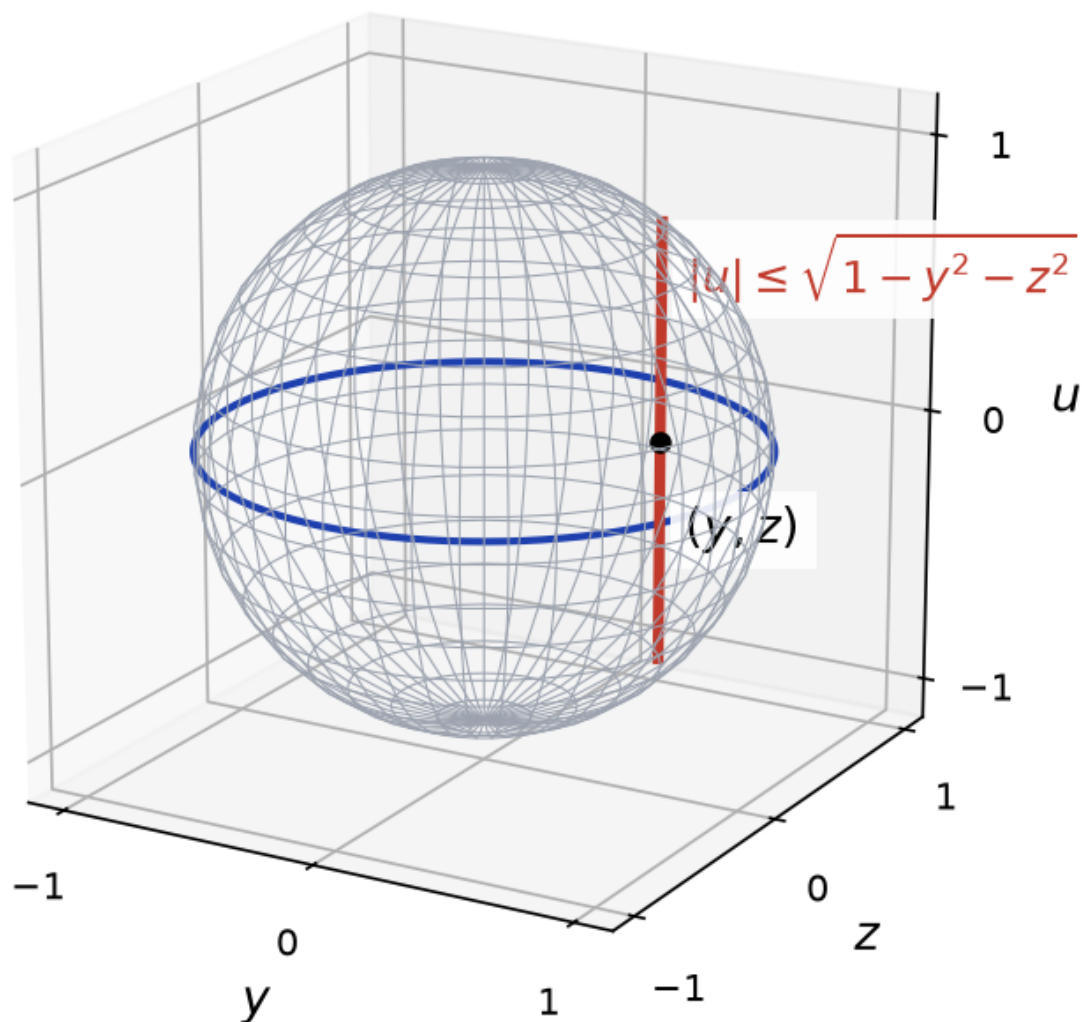
a. Vérifiez que $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = f(x, y)$. Calculez $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx$. (1,5 point)

b. Sans nouveau calcul, déduisez-en $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dx \right) dy$. (1 point)

c. On note D le quart de disque $\left\{ (x, y) : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1 \right\}$, inclus dans Q . En passant en polaires, calculez $\int_D |f| \, d\lambda_2$. Expliquez pourquoi ce résultat ne contredit pas le théorème de Fubini. (1,5 point)

Exercice 4 : Volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ (4 points)

Pour $n \geq 1$, on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, $B_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$ et $V_n = \lambda_n(B_n(1))$. La figure montre, pour $n = 3$, la tranche de la boule au-dessus d'un point (y, z) du disque unité.



a. Montrez que $\lambda_n(B_n(r)) = r^n V_n$ pour tout $r > 0$. (1 point)

b. Soit $n \geq 3$. En écrivant un point de $\mathbb{R}^n$ sous la forme (u, y, z) avec $u \in \mathbb{R}^{n-2}$ et

$(y, z) \in \mathbb{R}^2$, montrez que $V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}$. (2 points)

c. Calculez V_1 , V_2 , puis V_3 , V_4 , V_5 et V_6 . Montrez que $V_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. (1 point)

Exercice 5 : Problème, convolution d'indicatrices (5 points)

Pour f, g intégrables sur $\mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$.
On note $1 = 1_{[0,1]}$.

a. Montrez que $(1 * 1)(x) = \lambda([0,1] \cap [x-1, x])$ et donnez l'expression de $T = 1 * 1$ sur $\mathbb{R}$. Tracez son graphe. (1,5 point)

b. Montrez, par le théorème de Tonelli, que $\int_{\mathbb{R}} T d\lambda = \left(\int_{\mathbb{R}} 1 d\lambda \right)^2$, et vérifiez ce résultat sur le graphe. (1 point)

c. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On admet que $(x, y) \rightarrow f(x-y) g(y)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Montrez que $(f * g)(x)$ est défini pour presque tout x et que $|f * g|_1 \leq |f|_1 |g|_1$. (1,5 point)

d. On pose $h = T * 1$. Montrez que $h(x) = \int_{x-1}^x T(u) du$, puis calculez $h(x)$ pour $x \in [0, 1]$ et pour $x \in [1, 2]$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : Fubini-Tonelli et changement de variables

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Fubini et changement de variables](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [fubini et changement de variables](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).