

Contrôle de maths L3 : fonctions holomorphes et formule de Cauchy

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Fonctions holomorphes et formule de Cauchy
- **Durée conseillée** : 2 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 3,5 points ; exercice 4 : 3,5 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : trouver une fonction holomorphe de partie réelle donnée grâce aux équations de Cauchy-Riemann
 - Représenter : dessiner les chemins d'intégration et situer les points singuliers par rapport à eux
 - Raisonner : appliquer la formule intégrale de Cauchy, le théorème de Liouville et le principe des zéros isolés
 - Communiquer : énoncer avec leurs hypothèses les résultats fondamentaux sur les fonctions holomorphes

Exercice 1 : Question de cours : formule de Cauchy et théorème de Liouville (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans tout le sujet, les cercles $C(a,r)$ sont parcourus une fois dans le sens direct.

- a. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, f holomorphe sur U , et $\overline{D}(a,r)$ un disque fermé inclus dans U . Énoncez la formule intégrale de Cauchy donnant $f(z)$ pour $|z - a| < r$. (1 point)

- b. On admet que, dans ces conditions, $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $M(r) = \max_{|w-a|=r} |f(w)|$. Démontrez les inégalités de Cauchy : $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M(r)}{r^n}$. (1,5 point)
- c. Énoncez et démontrez le théorème de Liouville. (1,5 point)

Exercice 2 : Équations de Cauchy-Riemann (4 points)

On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ en écrivant $z = x + iy$, et on écrit une fonction f sous la forme $f = u + iv$, avec u et v à valeurs réelles.

- a. Rappelez les équations de Cauchy-Riemann et la caractérisation des fonctions holomorphes qu'elles fournissent. Exprimez $f'(z)$ à l'aide des dérivées partielles de u et v . (1 point)
- b. Soit $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2x$. Vérifiez que u est harmonique. Montrez ensuite que $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ n'est la partie réelle d'aucune fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. (1 point)
- c. Déterminez toutes les fonctions v telles que $f = u + iv$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}$. (1 point)
- d. Exprimez les fonctions f obtenues en fonction de la seule variable z . (1 point)

Exercice 3 : Détermination principale du logarithme (3,5 points)

On note $U = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Pour $z \in U$, on note $\text{Arg } z$ l'unique argument de z dans $] -\pi, \pi[$, et on pose $\text{Log } z = \ln|z| + i\text{Arg } z$.

- a. Vérifiez que $\exp(\text{Log } z) = z$ pour tout $z \in U$. Calculez $\text{Log}(1+i)$ et $\text{Log}(-i)$. (1 point)

- b. On admet que Arg est continue sur U . Montrez que Log est holomorphe sur U , de dérivée $z \rightarrow \frac{1}{z}$. (1,5 point)
- c. Montrez qu'il n'existe aucune fonction L holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ telle que $\exp(L(z)) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. On pourra calculer $\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z}$ de deux façons. (1 point)

Exercice 4 : Intégrales sur des cercles (3,5 points)

Représentez sur un même dessin les cercles $C(0,2)$ et $C(i,1)$, avec leur sens de parcours, ainsi que les points 1 , i et $-i$. Justifiez ensuite chaque calcul en précisant la fonction holomorphe et le disque utilisés.

- a. Faites le dessin, puis calculez $I_1 = \int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z-1} dz$. (1 point)
- b. Calculez $I_2 = \int_{C(0,2)} \frac{e^z}{(z-1)^3} dz$. (1 point)
- c. Calculez $I_3 = \int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2+1}$ et $I_4 = \int_{C(i,1)} \frac{dz}{z^2+1}$. (1,5 point)

Exercice 5 : Problème : Liouville, zéros isolés et maximum (5 points)

Les trois parties sont indépendantes.

- a. **Théorème de d'Alembert-Gauss.** Soit P un polynôme complexe de degré $n \geq 1$. En supposant que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, montrez que $\frac{1}{P}$ est entière et bornée, puis concluez. (1,5 point)

- b. **Zéros isolés.** Énoncez le principe des zéros isolés et sa conséquence, le principe du prolongement analytique. Déterminez toutes les fonctions entières f telles que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Montrez enfin qu'aucune fonction g holomorphe sur $D(0,2)$ ne vérifie $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \geq 1$. (2 points)
- c. **Principe du maximum.** Énoncez le principe du maximum pour une fonction holomorphe sur un ouvert connexe. Déterminez ensuite le maximum et le minimum de $|z^2 + 3|$ sur le disque fermé $\overline{D}(0,1)$, ainsi que les points où ils sont atteints. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : fonctions holomorphes et formule de Cauchy

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Fonctions holomorphes » en L3](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [fonctions holomorphes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).