Contrôle de maths L3 : fonctions holomorphes et formule de Cauchy

Fiche du contrôle

- **Niveau :** licence L3
- **Chapitre :** Fonctions holomorphes et formule de Cauchy
- **Durée conseillée :** 2 h
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 3,5 points ; exercice 4 : 3,5 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Calculer : trouver une fonction holomorphe de partie réelle donnée grâce aux équations de Cauchy-Riemann
  - Représenter : dessiner les chemins d'intégration et situer les points singuliers par rapport à eux
  - Raisonner : appliquer la formule intégrale de Cauchy, le théorème de Liouville et le principe des zéros isolés
  - Communiquer : énoncer avec leurs hypothèses les résultats fondamentaux sur les fonctions holomorphes

Exercice 1 : Question de cours : formule de Cauchy et théorème de Liouville (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans tout le sujet, les cercles $C(a,r)$ sont parcourus une fois dans le sens direct.

a. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, f holomorphe sur U, et $\overline{D}(a,r)$ un disque fermé inclus dans U. Énoncez la formule intégrale de Cauchy donnant $f(z)$ pour $|z-a|<r$. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. On admet que, dans ces conditions, $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $M(r) = \max_{|w-a|=r} |f(w)|$. Démontrez les inégalités de Cauchy : $\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!\,M(r)}{r^n}$. *(1,5 point)*

c. Énoncez et démontrez le théorème de Liouville. *(1,5 point)*

Exercice 2 : Équations de Cauchy-Riemann (4 points)

On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ en écrivant $z = x + iy$, et on écrit une fonction f sous la forme $f = u + iv$, avec u et v à valeurs réelles.

a. Rappelez les équations de Cauchy-Riemann et la caractérisation des fonctions holomorphes qu'elles fournissent. Exprimez $f'(z)$ à l'aide des dérivées partielles de u et v. *(1 point)*

b. Soit $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2x$. Vérifiez que u est harmonique. Montrez ensuite que $(x,y) \to x^2 + y^2$ n'est la partie réelle d'aucune fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. *(1 point)*

c. Déterminez toutes les fonctions v telles que $f = u + iv$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}$. *(1 point)*

d. Exprimez les fonctions f obtenues en fonction de la seule variable z. *(1 point)*

Exercice 3 : Détermination principale du logarithme (3,5 points)

On note $U = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Pour $z \in U$, on note $\operatorname{Arg} z$ l'unique argument de z dans $]-\pi, \pi[$, et on pose $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$.

a. Vérifiez que $\exp(\operatorname{Log} z) = z$ pour tout $z \in U$. Calculez $\operatorname{Log}(1+i)$ et $\operatorname{Log}(-i)$. *(1 point)*

b. On admet que Arg est continue sur U. Montrez que Log est holomorphe sur U, de dérivée $z \to \frac{1}{z}$. *(1,5 point)*

c. Montrez qu'il n'existe aucune fonction L holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ telle que $\exp(L(z)) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. On pourra calculer $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\mathrm{d}z}{z}$ de deux façons. *(1 point)*

Exercice 4 : Intégrales sur des cercles (3,5 points)

Représentez sur un même dessin les cercles $C(0,2)$ et $C(i,1)$, avec leur sens de parcours, ainsi que les points 1, i et $-i$. Justifiez ensuite chaque calcul en précisant la fonction holomorphe et le disque utilisés.

a. Faites le dessin, puis calculez $I_1 = \displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z-1}\,\mathrm{d}z$. *(1 point)*

b. Calculez $I_2 = \displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z$. *(1 point)*

c. Calculez $I_3 = \displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$ et $I_4 = \displaystyle\int_{C(i,1)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$. *(1,5 point)*

Exercice 5 : Problème : Liouville, zéros isolés et maximum (5 points)

Les trois parties sont indépendantes.

a. **Théorème de d'Alembert-Gauss.** Soit P un polynôme complexe de degré $n \geq 1$. En supposant que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, montrez que $\frac{1}{P}$ est entière et bornée, puis concluez. *(1,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. **Zéros isolés.** Énoncez le principe des zéros isolés et sa conséquence, le principe du prolongement analytique. Déterminez toutes les fonctions entières f telles que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Montrez enfin qu'aucune fonction g holomorphe sur $D(0,2)$ ne vérifie $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \geq 1$. *(2 points)*

c. **Principe du maximum.** Énoncez le principe du maximum pour une fonction holomorphe sur un ouvert connexe. Déterminez ensuite le maximum et le minimum de $|z^2 + 3|$ sur le disque fermé $\overline{D}(0,1)$, ainsi que les points où ils sont atteints. *(1,5 point)*

Réviser avant le contrôle : fonctions holomorphes et formule de Cauchy

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Fonctions holomorphes » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** fonctions holomorphes.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L3** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.