

Contrôle de maths L3 : extrema libres et multiplicateurs de Lagrange

Fiche du contrôle

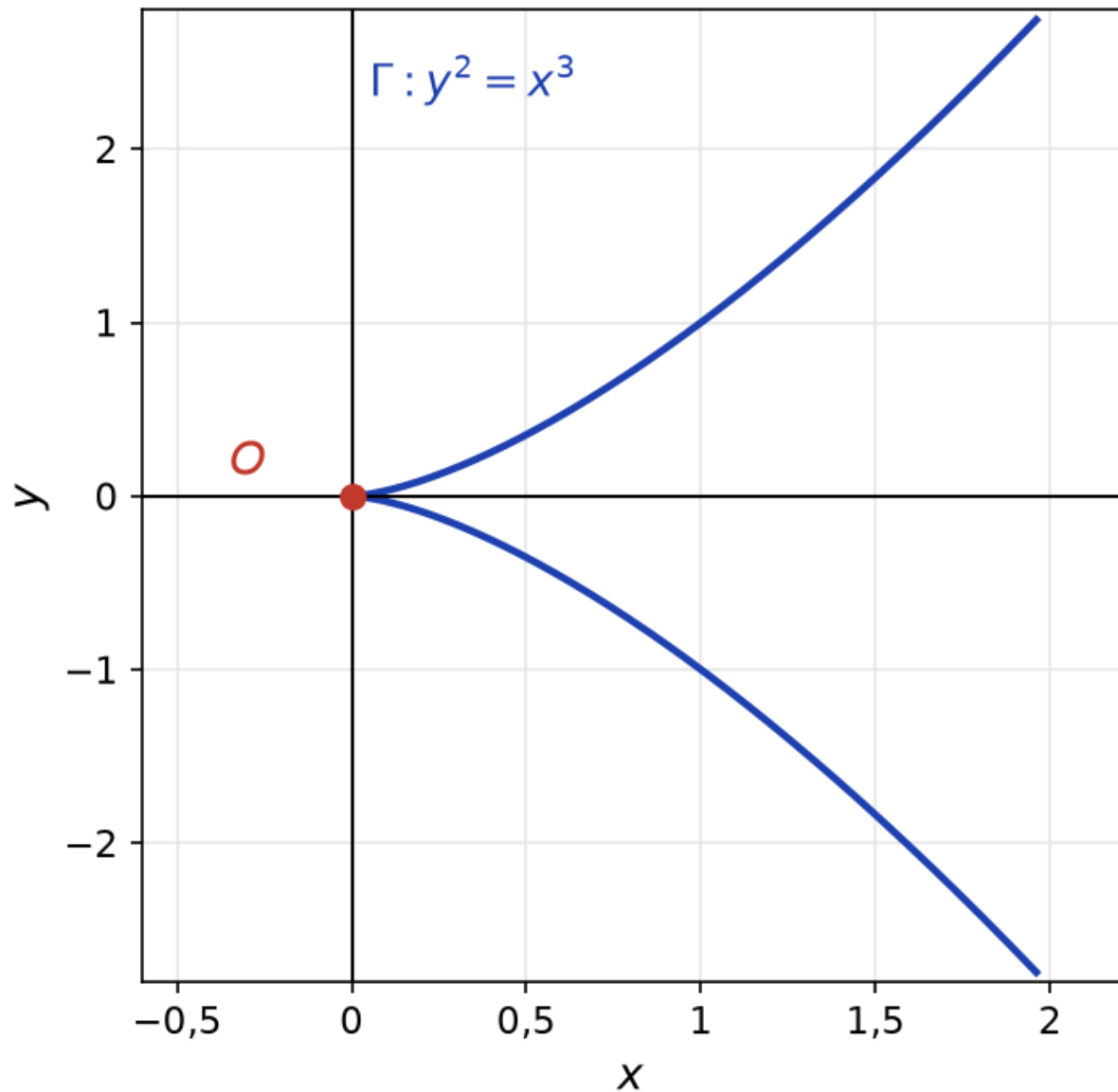
- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Inversion locale, fonctions implicites et extrema liés
- **Durée conseillée** : 2 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 6 points ; exercice 4 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : déterminer les points critiques d'une fonction et étudier leur nature par la matrice hessienne
 - Raisonner : justifier l'existence d'un extremum global par compacité ou par coercivité
 - Modéliser : traduire un problème d'optimisation sous contrainte par la méthode des multiplicateurs de Lagrange
 - Communiquer : énoncer le théorème des extrema liés avec sa condition de qualification

Exercice 1 : Question de cours : conditions d'extremum (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

- a. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. Démontrez que si f admet un extremum local en a , alors $df(a) = 0$. (1,5 point)
- b. Énoncez le théorème des extrema liés (multiplicateurs de Lagrange) pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sous des contraintes $g_1 = \dots = g_p = 0$, en précisant la condition de qualification. (1,5 point)

- c. On considère la courbe Γ d'équation $g(x,y) = y^2 - x^3 = 0$, tracée ci-dessous, et $f(x,y) = x$. Montrez que f restreinte à Γ atteint son minimum en $O = (0,0)$. Existe-t-il un réel λ tel que $\nabla f(O) = \lambda \nabla g(O)$? Expliquez. (1 point)



Exercice 2 : Points critiques et matrice hessienne (5 points)

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

- Déterminez les points critiques de f . (1,5 point)
- Calculez la matrice hessienne de f en chaque point critique et déterminez leur nature. (1,5 point)
- Montrez que $f(x,y) \geq \frac{r^4}{2} - 2r^2$, où $r^2 = x^2 + y^2$. Déduisez-en que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et donnez sa valeur. f admet-elle un maximum global ? (1 point)
- On pose $h(x,y) = x^2 + y^3$ et $k(x,y) = x^2 + y^4$. Montrez que $(0,0)$ est un point critique de ces deux fonctions, avec la même hessienne. Étudiez à la main s'il s'agit d'un extremum. Que peut-on en conclure ? (1 point)

Exercice 3 : Extrema de xyz sur une sphère (6 points)

On note $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$ et $f(x,y,z) = xyz$.

- Justifiez que f admet un maximum et un minimum sur S . (1 point)
- On pose $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$. Vérifiez que la condition de qualification est satisfaite en tout point de S . (0,5 point)
- Écrivez le système vérifié par un point (x,y,z) de S en lequel $f|_S$ admet un extremum, avec un multiplicateur λ . (1 point)
- Résolvez ce système. On distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$. (1,5 point)
- Déduisez-en le maximum et le minimum de f sur S , ainsi que les points où ils sont atteints. (1 point)
- Déduisez-en que pour tous réels a, b, c positifs, $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$. (1 point)

Exercice 4 : Problème : minimisation d'une fonctionnelle quadratique (5 points)

Soit $n \geq 1$, A une matrice symétrique définie positive de taille n , et $b \in \mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle.$$

- Développez $J(x+h)$. Déduisez-en le gradient et la matrice hessienne de J en tout point. (1 point)
- Montrez que, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$, on a

$$J(tx + (1-t)y) = tJ(x) + (1-t)J(y) - \frac{t(1-t)}{2} \langle A(x-y), x-y \rangle.$$
Déduisez-en que J est strictement convexe. (1 point)
- On note $\lambda_1 > 0$ la plus petite valeur propre de A . Montrez que $J(x) \geq \frac{\lambda_1}{2} |x|^2 - |b| |x|$. (1 point)
- Montrez que J admet un unique minimum global, atteint en $x^* = A^{-1}b$, et que

$$J(x^*) = -\frac{1}{2} \langle A^{-1}b, b \rangle.$$
 (1 point)
- Application : $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $b = (1, 1)$. Vérifiez que A est définie positive, puis calculez x^* et $J(x^*)$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : extrema libres et multiplicateurs de Lagrange

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Inversion locale et extrema liés](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [inversion locale et extrema liés](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : inversion locale et fonctions implicites](#)