Contrôle de maths L3 : extensions de corps et corps finis

Fiche du contrôle

- **Niveau :** licence L3
- **Chapitre :** Corps, extensions et corps finis
- **Durée conseillée :** 2 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 5 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : démontrer le théorème de la base télescopique
  - Calculer : déterminer le degré d'une extension et un polynôme minimal
  - Représenter : construire un corps fini comme quotient et dresser ses tables
  - Raisonner : prouver la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini
  - Chercher : montrer qu'un nombre n'est pas constructible à la règle et au compas

Exercice 1 : Question de cours : la base télescopique (3 points)

Calculatrice interdite.

Soit $K \subset L \subset M$ trois corps. On suppose les extensions L/K et M/L finies.

a. Énoncez le théorème de la base télescopique et démontrez-le. Vous partirez d'une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de L sur K et d'une base $(f_j)_{1 \leq j \leq m}$ de M sur L. *(2 points)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. Soit $\alpha \in M$. Montrez que α est algébrique sur K et que son degré sur K divise $[M : K]$. *(1 point)*

Exercice 2 : Degré de Q(√2, √3) et polynôme minimal de √2 + √3 (5 points)

On pose $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

a. Montrez que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. *(1 point)*

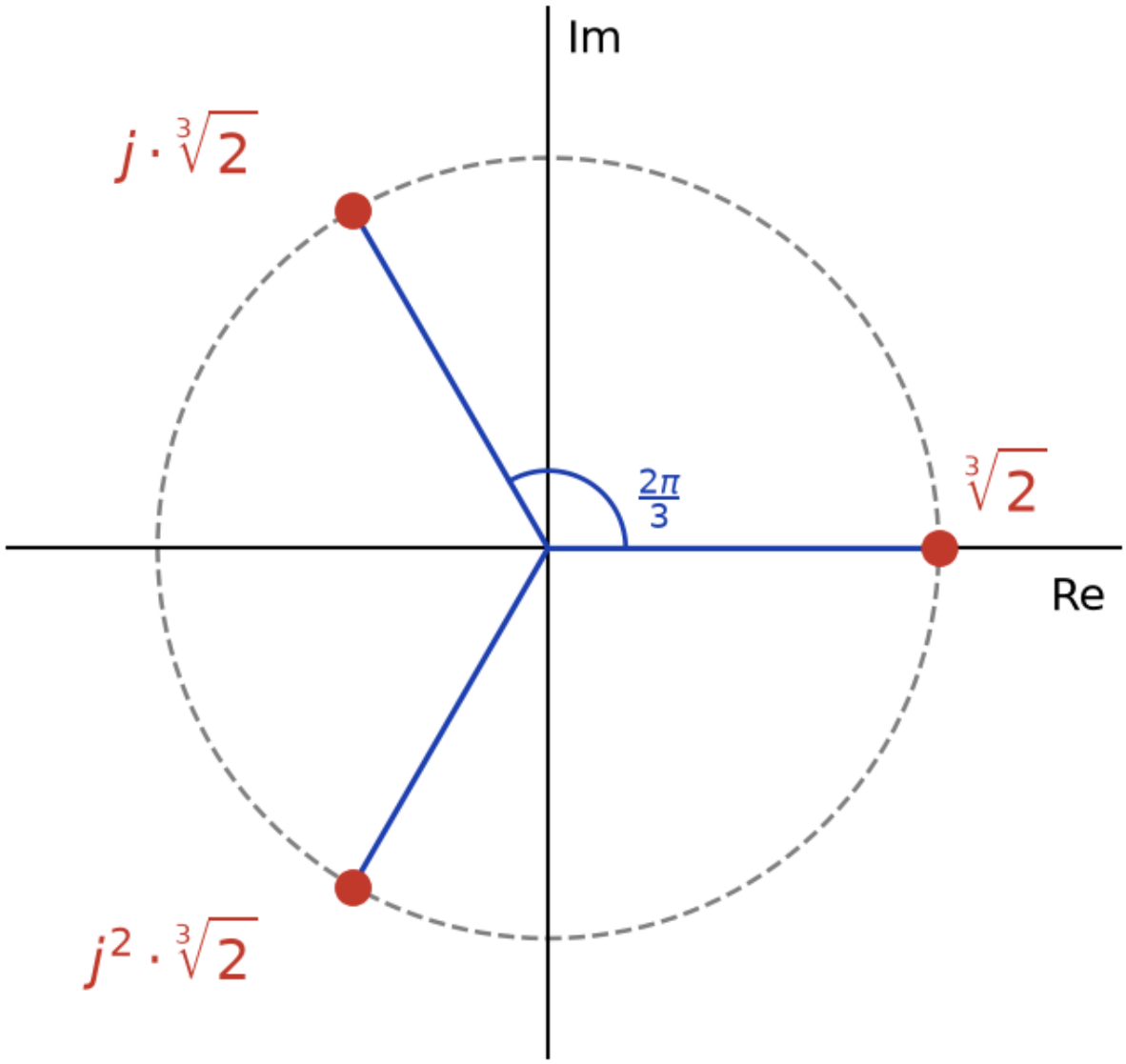
b. Déduisez-en le degré $[L : \mathbb{Q}]$ et donnez une base de L sur $\mathbb{Q}$. *(1,5 point)*

c. Trouvez un polynôme unitaire $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 4 tel que $P(\alpha) = 0$. *(1 point)*

d. Calculez α^3 et exprimez $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ en fonction de α. Montrez ensuite que $\mathbb{Q}(\alpha) = L$. Déduisez-en le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$. *(1,5 point)*

Exercice 3 : Corps de décomposition de X³ − 2 (3 points)

On note $j = e^{2i\pi/3}$. Les racines complexes de $X^3 - 2$ sont représentées ci-dessous.



a. Montrez que $X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Donnez ses trois racines complexes. *(1 point)*

b. On note K le corps de décomposition de $X^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$. Montrez que $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$, puis que $[K : \mathbb{Q}] = 6$. *(1,5 point)*

c. Les corps $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ et $\mathbb{Q}(j\sqrt[3]{2})$ sont-ils égaux ? Justifiez. *(0,5 point)*

Exercice 4 : Corps finis F4 et F8, cyclicité du groupe multiplicatif (5 points)

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

a. Montrez que $X^2 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_2$. On pose $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$ et on note ω la classe de X. Donnez les éléments de $\mathbb{F}_4$, puis dressez ses tables d'addition et de multiplication. *(1,5 point)*

b. On admet que $X^3 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_2$. On pose $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ et on note β la classe de X. Écrivez β^k, pour $0 \leq k \leq 7$, dans la base $(1, \beta, \beta^2)$. Déduisez-en que β engendre le groupe $\mathbb{F}_8^*$. *(1,5 point)*

c. Soit F un corps fini de cardinal q. On admet que $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$ pour tout entier $n \geq 1$, où φ est l'indicatrice d'Euler. Démontrez que le groupe F^* est cyclique. Trouvez ensuite un générateur de $\mathbb{F}_{13}^*$. *(2 points)*

Exercice 5 : Problème : la duplication du cube et la trisection (4 points)

On admet le théorème de Wantzel : si un réel x est constructible à la règle et au compas, il existe une suite de corps $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_m$ telle que $[K_{i+1} : K_i] = 2$ pour tout i, et $x \in K_m$.

a. Montrez que le degré $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ d'un réel constructible est une puissance de 2. *(1,5 point)*

b. Dupliquer le cube consiste à construire l'arête d'un cube de volume double de celui d'un cube d'arête 1. Montrez que c'est impossible à la règle et au compas. *(1 point)*

c. On pose $c = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ et $x = 2c$. À l'aide de la formule $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, montrez que $x^3 - 3x - 1 = 0$. Montrez ensuite que x n'est pas constructible. Qu'en déduisez-vous pour la trisection de l'angle de 60° ? *(1,5 point)*

Réviser avant le contrôle : extensions de corps et corps finis

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Corps et extensions » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** corps et extensions.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L3** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- Contrôle de maths L3 : partiel d'algèbre : groupes, anneaux et corps

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.