

Contrôle de maths L3 : espaces métriques, ouverts, fermés, continuité

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Espaces métriques : ouverts, fermés, continuité
- **Durée conseillée** : 1 heure 30 minutes
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 6 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer les caractérisations séquentielle des fermés et topologique de la continuité
 - Chercher : vérifier les axiomes d'une distance, en particulier l'inégalité triangulaire
 - Calculer : déterminer intérieur, adhérence et frontière de parties explicites
 - Communiquer : rédiger des preuves valables dans un espace métrique quelconque

Exercice 1 : Question de cours, fermés et continuité (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 1 heure 30 minutes.

Dans cet exercice, (E, d) et (F, δ) sont deux espaces métriques quelconques.

- Soit A une partie de E . Démontrez que A est fermée si et seulement si, pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge dans E vers un point x , on a $x \in A$. (2 points)
- Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Démontrez que f est continue en tout point de E si et seulement si, pour tout ouvert V de F , l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E .

(2 points)

Exercice 2 : Deux distances non usuelles (5 points)

Partie A. Pour x, y réels, on pose $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$.

- Montrez que d est une distance sur $\mathbb{R}$. (1 point)
- Montrez qu'il n'existe aucune constante $C > 0$ telle que $|x - y| \leq C d(x, y)$ pour tous réels x, y . Montrez pourtant que d et la distance usuelle définissent les mêmes ouverts de $\mathbb{R}$. (1,5 point)

Partie B. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ et on note O l'origine. On dit que x et y sont alignés avec O lorsque la famille (x, y) est liée. On pose

$$d_S(x, y) = \|x - y\| \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont alignés avec } O, \quad d_S(x, y) = \|x\| + \|y\| \text{ sinon.}$$

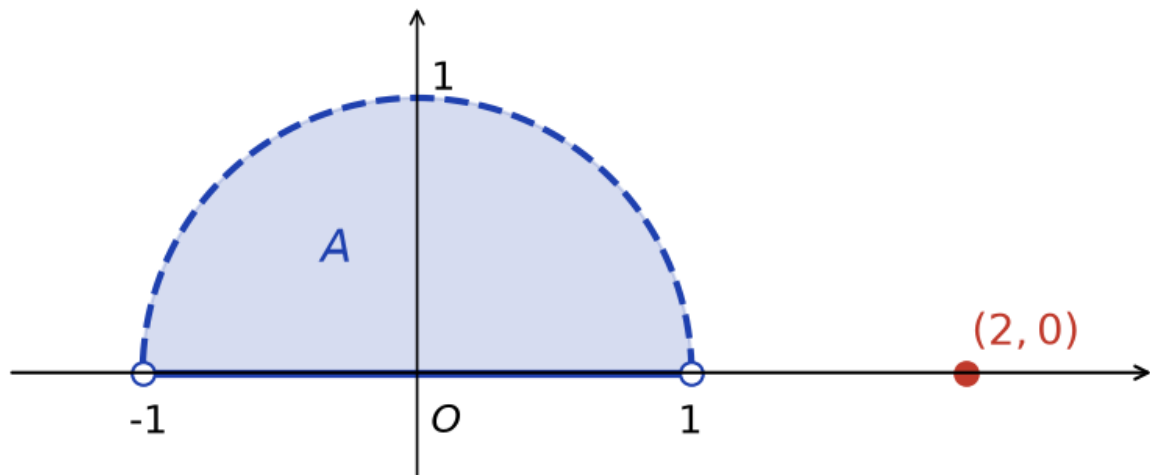
(C'est la distance « SNCF » : pour aller d'une ville à une autre qui n'est pas sur la même ligne, on passe par Paris.)

- Montrez que d_S est une distance sur $\mathbb{R}^2$. (1,5 point)
- Soit $a \in \mathbb{R}^2$ non nul et $r > 0$. Décrivez la boule ouverte $B_S(a, r)$ pour cette distance, en distinguant les cas $r \leq \|a\|$ et $r > \|a\|$. (1 point)

Exercice 3 : Intérieur, adhérence, frontière et densité (5 points)

Sauf mention contraire, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont munis de leurs distances usuelles. On considère la partie

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ et } y \geq 0\} \cup \{(2, 0)\}.$$



- Déterminez, en justifiant, l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A . (2 points)
- Déterminez l'intérieur, l'adhérence et la frontière de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. (1 point)
- On munit $\mathbb{Q}$ de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$. Montrez que $P = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ est à la fois un ouvert et un fermé de l'espace métrique $\mathbb{Q}$. (1 point)
- Montrez que l'ensemble $\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{2^n} : \begin{matrix} p \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\}$ des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$. (1 point)

Exercice 4 : Problème, distance à une partie (6 points)

Soit (E, d) un espace métrique. Pour toute partie non vide A de E et tout $x \in E$, on pose $d_A(x) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

- Montrez que, pour tous $x, y \in E$, $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$. Qu'en déduisez-vous pour la fonction d_A ? (1,5 point)

- b. Montrez que l'adhérence de A est $\overline{A} = \{x \in E : d_A(x) = 0\}$. En déduire que tout fermé non vide de E est l'ensemble des zéros d'une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$. (1,5 point)
- c. Soit F et G deux fermés non vides et disjoints de E . Justifiez que $d_F(x) + d_G(x) > 0$ pour tout $x \in E$, puis que la fonction $g = \frac{d_F}{d_F + d_G}$ est continue, vaut 0 sur F et 1 sur G . Déduisez-en deux ouverts disjoints U et V tels que $F \subset U$ et $G \subset V$. (2 points)
- d. Soit D une partie dense de E et $f, h : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues qui coïncident sur D . Montrez que $f = h$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : espaces métriques, ouverts, fermés, continuité

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Espaces métriques](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces métriques](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).