

Contrôle de maths L3 : espaces de Hilbert, projection et Parseval

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Espaces de Hilbert et analyse de Fourier
- **Durée conseillée** : 3 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 3,5 points ; exercice 3 : 3,5 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Communiquer : énoncer et démontrer la caractérisation de la projection sur un convexe fermé et le théorème de Riesz
 - Calculer : obtenir une projection orthogonale par les équations normales et une distance à un sous-espace
 - Raisonner : appliquer l'égalité de Parseval à une base hilbertienne pour sommer une série
 - Calculer : déterminer la transformée de Fourier d'une gaussienne et de $e^{-|x|}$

Exercice 1 : Question de cours : projection et théorème de Riesz (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans cet exercice, H est un espace de Hilbert réel ou complexe. Son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche, et $\|\cdot\|$ désigne la norme associée.

- a. Énoncez le théorème de projection sur un convexe fermé non vide C de H , avec la caractérisation du projeté $p = P_C(x)$ par une inégalité. (1 point)

- b. On admet l'existence et l'unicité du projeté. Démontrez la caractérisation : $p \in C$ est le projeté de x si et seulement si $\operatorname{Re}\langle x - p, y - p \rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$. (1,5 point)
- c. Énoncez puis démontrez le théorème de représentation de Riesz pour une forme linéaire continue φ sur H . Vous pourrez utiliser le projeté d'un vecteur sur le noyau de φ . (1,5 point)

Exercice 2 : Projection sur le cône des fonctions positives (3,5 points)

On se place dans l'espace de Hilbert réel $H = L^2(0,1)$, muni de $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$. On pose $C = \{f \in H : f \geq 0 \text{ presque partout}\}$. Pour $f \in H$, on note $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$, de sorte que $f = f^+ - f^-$.

- a. Montrez que C est un convexe fermé non vide de H . (1,5 point)
- b. Montrez que, pour tout $f \in H$, le projeté de f sur C est f^+ . (1,5 point)
- c. On prend $f(x) = 2x - 1$. Calculez la distance de f à C . (0,5 point)

Exercice 3 : Distance à un sous-espace de polynômes (3,5 points)

On reste dans $H = L^2(0,1)$ réel. On note E le sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus 1, c'est-à-dire des fonctions $x \rightarrow a + bx$ avec a, b réels.

- a. Justifiez que la fonction $x \rightarrow x^2$ admet un unique projeté orthogonal p sur E . (0,5 point)
- b. Écrivez les deux équations qui caractérisent p , puis déterminez p . (1,5 point)

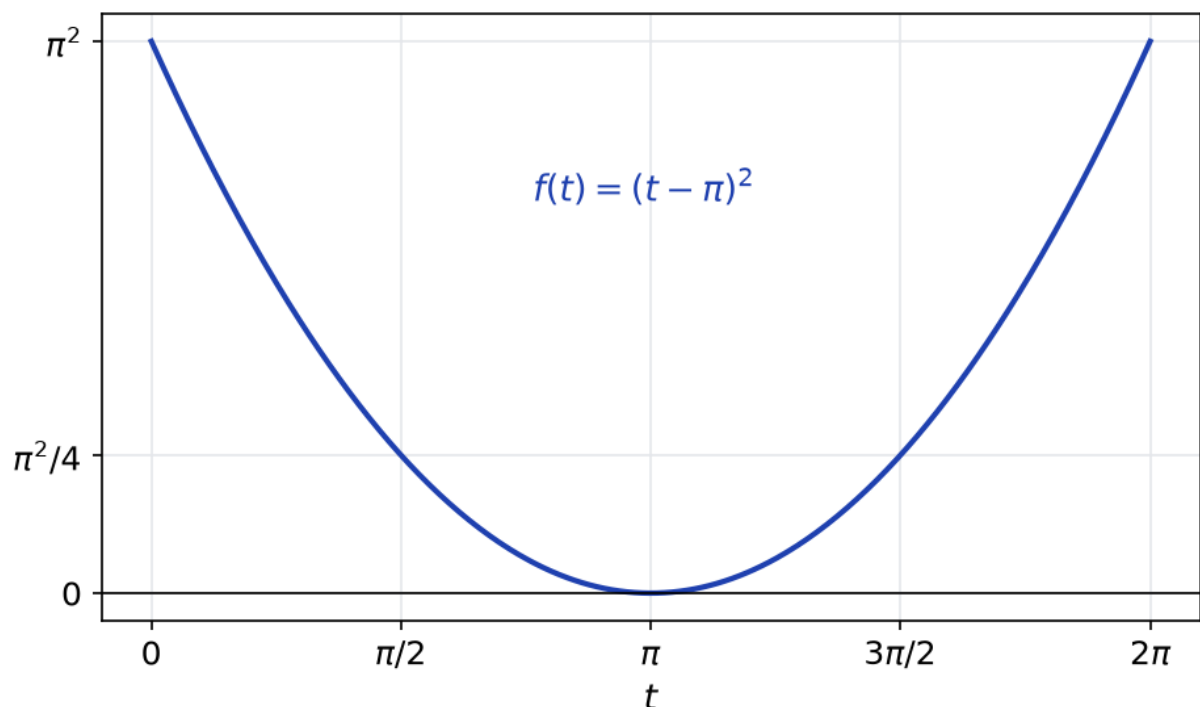
c. Déduisez-en la valeur de $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - a - bx)^2 dx$. (1 point)

d. Construisez une base orthonormée (e_0, e_1) de E par le procédé de Gram-Schmidt appliqué à $(1, x)$. Retrouvez P à l'aide de cette base. (0,5 point)

Exercice 4 : Égalité de Parseval et somme des $1/n^4$ (4 points)

On munit $L^2(0, 2\pi)$, à valeurs complexes, du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$. On admet que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, avec $e_n(t) = e^{int}$, est une base hilbertienne de cet espace. On note $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$.

On étudie la fonction $f(t) = (t - \pi)^2$ sur $[0, 2\pi]$.



a. Énoncez l'égalité de Parseval pour une base hilbertienne. (1 point)

b. Calculez $c_0(f)$, puis montrez que $c_n(f) = \frac{2}{n^2}$ pour tout $n \neq 0$. (1,5 point)

c. Déduisez-en la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. (1,5 point)

Exercice 5 : Problème : transformée de Fourier sur la droite réelle (5 points)

Pour $h \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\widehat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-ix\xi} dx$. On pose $f(x) = e^{-|x|}$ et $g(x) = e^{-x^2/2}$, et on admet que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

a. Calculez $\widehat{f}(\xi)$ pour tout réel ξ . (1 point)

b. Montrez que $\widehat{g}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie $\widehat{g}'(\xi) = -\xi \widehat{g}(\xi)$. Déduisez-en $\widehat{g}$. (2 points)

c. On admet le théorème de Plancherel : si $h \in L^1 \cap L^2$, alors $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}|^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |h|^2$.

Déduisez-en $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2}$. (1 point)

d. Énoncez le théorème d'inversion de Fourier et vérifiez ses hypothèses pour f . Déduisez-en, pour tout réel x , la valeur de $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x\xi)}{1+\xi^2} d\xi$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : espaces de Hilbert, projection et Parseval

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Espaces de Hilbert](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces de hilbert](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).