

Contrôle de maths L3 : différentielle de Fréchet et formules de Taylor

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Calcul différentiel dans les espaces normés
- **Durée conseillée** : 2 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : obtenir la différentielle de Fréchet d'applications matricielles par un développement à l'ordre 1
 - Raisonner : distinguer différentiabilité, continuité et existence des dérivées directionnelles
 - Communiquer : énoncer avec leurs hypothèses l'inégalité des accroissements finis et le théorème de Schwarz
 - Chercher : exploiter la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour étudier une limite ou majorer un reste

Exercice 1 : Question de cours : différentiabilité et accroissements finis (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans tout l'exercice, E et F sont des espaces vectoriels normés, U est un ouvert de E et $f : U \rightarrow F$ une application.

- a. Donnez la définition de « f est différentiable en $a \in U$ ». Démontrez ensuite que si f est

différentiable en a , alors f est continue en a . (1,5 point)

- b. Énoncez l'inégalité des accroissements finis pour une application différentiable sur un ouvert convexe. Déduisez-en que si U est convexe et si $df(x) = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante sur U . (1,5 point)

Exercice 2 : Différentielles d'applications matricielles (5 points)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$, c'est-à-dire telle que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ pour toutes matrices A et B . On admet que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'application $A \rightarrow A^{-1}$ est continue sur cet ouvert.

- a. Soit $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A^2$. Montrez que f est différentiable en tout point A et que $df(A)(H) = AH + HA$. (1,5 point)
- b. Soit $g: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $g(A) = A^{-1}$. Pour A inversible et H telle que $A + H$ soit inversible, établissez l'égalité

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1} H A^{-1} = (A+H)^{-1} H A^{-1} H A^{-1}.$$

Déduisez-en que g est différentiable en A avec $dg(A)(H) = -A^{-1} H A^{-1}$. (2 points)

- c. Montrez que $\det(I_n + H) = 1 + \text{tr}(H) + o(\|H\|)$ quand $H \rightarrow 0$. Déduisez-en que le déterminant est différentiable en toute matrice inversible A , avec $d(\det)(A)(H) = \det(A) \text{tr}(A^{-1} H)$. (1,5 point)

Exercice 3 : Dérivées directionnelles sans différentiabilité (4 points)

On définit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(0,0) = 0$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

- Soit $v = (h,k)$ un vecteur non nul. Montrez que f admet en $(0,0)$ une dérivée selon v , notée $D_v f(0,0)$, et calculez-la selon que $k \neq 0$ ou $k = 0$. (1,5 point)
- L'application $v \rightarrow D_v f(0,0)$ est-elle linéaire ? Que peut-on en conclure sur la différentiabilité de f en $(0,0)$? (1 point)
- Calculez $f(x, x^2)$ pour $x \neq 0$. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? (1 point)
- Donnez les deux dérivées partielles de f en $(0,0)$. Expliquez pourquoi leur existence ne suffit pas à conclure. (0,5 point)

Exercice 4 : Théorème de Schwarz et contre-exemple (3 points)

On définit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(0,0) = 0$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$g(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}.$$

- Calculez $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$. Montrez ensuite que $|g(x,y)| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ et déduisez-en que g est différentiable en $(0,0)$. (1 point)
- Pour $y \neq 0$, calculez $\frac{\partial g}{\partial x}(0,y)$; pour $x \neq 0$, calculez $\frac{\partial g}{\partial y}(x,0)$. (1 point)
- Déduisez-en les dérivées croisées $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$. Énoncez le théorème de Schwarz et expliquez pourquoi il n'y a pas de contradiction. (1 point)

Exercice 5 : Problème : formule de Taylor et majoration du reste (5 points)

On considère $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = e^x \cos y$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$.

- Justifiez que φ est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculez son gradient et sa matrice hessienne en un point (x,y) , puis en $(0,0)$. (1 point)
- Écrivez la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 de φ en $(0,0)$. (1 point)
- Étudiez l'existence de la limite de $\frac{\varphi(x,y) - 1 - x}{x^2 + y^2}$ quand $(x,y) \rightarrow (0,0)$. (1 point)
- On note $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}$. Montrez que pour tous points a et b de P , on a $|\varphi(b) - \varphi(a)| \leq e \|b - a\|$. (1 point)
- Calculez la norme d'opérateur de la hessienne en (x,y) . À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrez que pour $x^2 + y^2 \leq 1$, on a $|\varphi(x,y) - 1 - x| \leq \frac{e}{2} (x^2 + y^2)$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : différentielle de Fréchet et formules de Taylor

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Calcul différentiel](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [calcul différentiel](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).