

Contrôle de maths L3 : convergence monotone et lemme de Fatou

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Intégrale de Lebesgue et théorèmes de convergence
- **Durée conseillée** : 1 heure 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 6 points ; exercice 4 : 6 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer le lemme de Fatou à partir du théorème de convergence monotone
 - Calculer : obtenir des limites d'intégrales de fonctions positives
 - Chercher : développer un intégrande en série de fonctions positives
 - Modéliser : traduire une propriété presque partout par une intégrale finie

Exercice 1 : Question de cours, le lemme de Fatou (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 1 heure 30. Le théorème de convergence dominée ne doit pas être utilisé dans ce sujet.

Dans tout le sujet, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré, et λ la mesure de Lebesgue.

- Énoncez le théorème de convergence monotone de Beppo Levi pour une suite de fonctions mesurables positives. (1 point)
- Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $[0, +\infty]$. En posant

$g_n = \inf_{k \geq n} f_k$, démontrez le lemme de Fatou :

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

(3 points)

Exercice 2 : Deux limites par convergence monotone (4 points)

- a. Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} 1_{[0, n]}(x)$. Montrez que, pour $x \geq 0$ fixé, la fonction $u \rightarrow u \ln\left(1 + \frac{x}{u}\right)$ est croissante sur $]0, +\infty[$. Déduisez-en la

limite de $\int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx$. (2 points)

- b. Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose $h_n(x) = \frac{1 - e^{-n x^2}}{x^2}$. Montrez que

$0 \leq h_n(x) \leq \min\left(n, \frac{1}{x^2}\right)$, puis que $J_n = \int_0^{+\infty} h_n(x) \, dx$ est fini. Déterminez la limite de J_n . (2 points)

Exercice 3 : Intégration terme à terme et somme des inverses des carrés (6 points)

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- a. Montrez que, pour tout $x > 0$, $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-n x}$. (1 point)

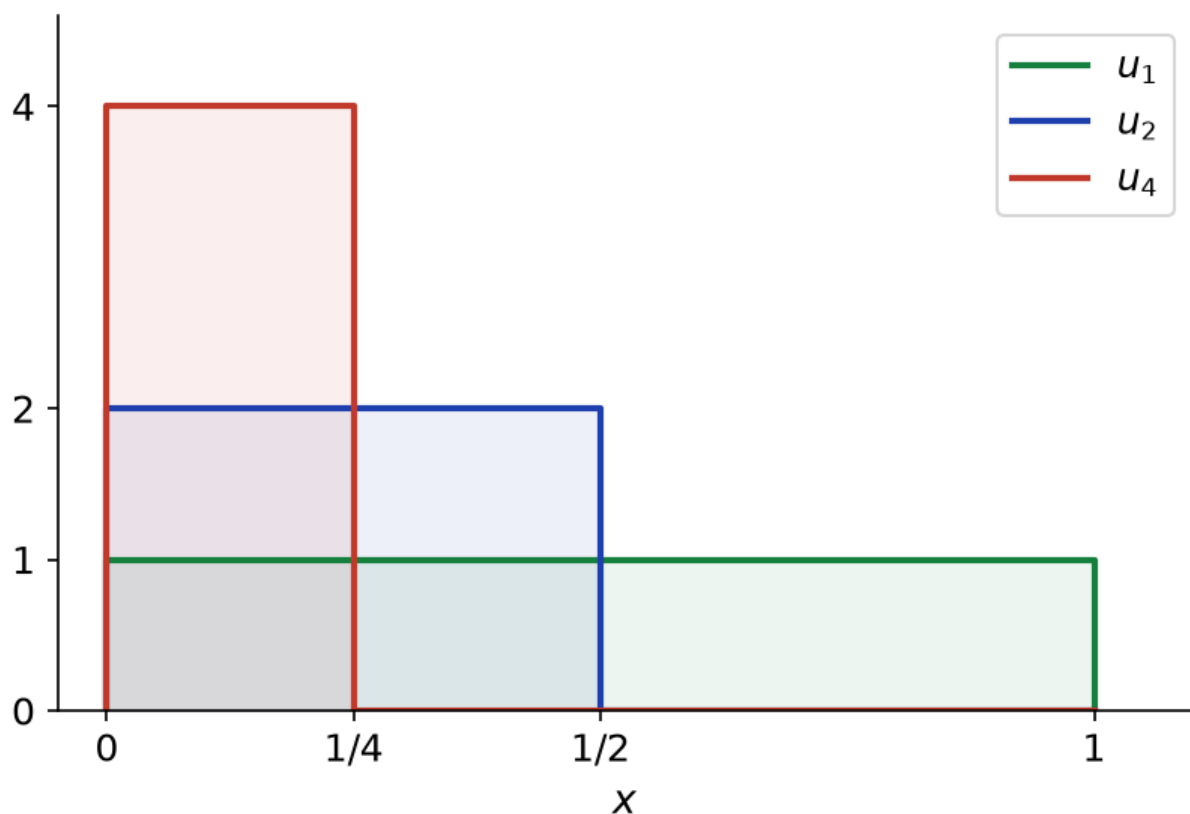
b. Calculez, pour $n \geq 1$, $\int_0^{+\infty} x e^{-n x} dx$. (1 point)

c. Justifiez l'intégration terme à terme et calculez $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$. (2 points)

d. Par la même méthode, calculez $\int_0^1 \frac{-\ln x}{1-x} dx$. (2 points)

Exercice 4 : Problème, masse perdue et fonctions presque partout finies (6 points)

Pour $n \geq 1$, on considère les fonctions $u_n = n 1_{]0, 1/n]}$ sur $[0, 1]$ et $v_n = 1_{[n, n+1]}$ sur $\mathbb{R}$. La figure représente u_1 , u_2 et u_4 .



- a. Déterminez la limite simple des suites (u_n) et (v_n) , puis comparez $\int \liminf u_n$ et $\liminf \int u_n$, et de même pour (v_n) . Décrivez en une phrase les deux façons dont la masse se perd. (1,5 point)
- b. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives sur X qui converge μ -presque partout vers une fonction mesurable $f : X \rightarrow [0, +\infty]$, avec $\int_X f_n d\mu \leq C$ pour tout n .
Montrez que $\int_X f d\mu \leq C$ et que f est finie presque partout. (1,5 point)
- c. Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\sum_n \mu(A_n) < +\infty$. En étudiant $S = \sum_n 1_{A_n}$, montrez que presque tout point de X n'appartient qu'à un nombre fini des A_n (lemme de Borel-Cantelli). (1,5 point)
- d. Soit $(r_n)_{n \geq 1}$ une énumération de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Calculez $\int_0^1 |x - r|^{-1/2} dx$ pour $r \in [0, 1]$ et majorez ce nombre par $2\sqrt{2}$. Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 \sqrt{|x - r_n|}}$ converge pour λ -presque tout $x \in [0, 1]$. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : convergence monotone et lemme de Fatou

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Intégrale de Lebesgue](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégrale de lebesgue](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : convergence dominée et intégrales à paramètre](#)
- [Contrôle de maths L3 : partiel final : intégration et probabilités](#)