

Contrôle de maths L3 : convergence dominée et intégrales à paramètre

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Intégrale de Lebesgue et théorèmes de convergence
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 3 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 5 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer la continuité d'une intégrale à paramètre à partir de la convergence dominée
 - Chercher : construire une fonction dominante intégrable indépendante du paramètre
 - Calculer : obtenir une intégrale à paramètre par une équation différentielle
 - Communiquer : vérifier et rédiger chaque hypothèse avant d'appliquer un théorème

Exercice 1 : Question de cours, convergence dominée et continuité (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 2 heures.

Dans tout le sujet, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et λ désigne la mesure de Lebesgue. Chaque application d'un théorème doit être précédée de la vérification rédigée de toutes ses hypothèses.

- a. Énoncez le théorème de convergence dominée. (1 point)

- b. Énoncez le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour $F(x) = \int_X f(x, t) \, d\mu(t)$, où x parcourt un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. (1 point)
- c. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \times X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : pour tout $x \in I$, $t \rightarrow f(x, t)$ est mesurable ; pour presque tout t , $x \rightarrow f(x, t)$ est continue ; il existe g intégrable sur X telle que $|f(x, t)| \leq g(t)$ pour tout x et presque tout t . Démontrez que $F(x) = \int_X f(x, t) \, d\mu(t)$ est définie et continue sur I . (2 points)

Exercice 2 : Trois limites d'intégrales (3 points)

Déterminez les limites suivantes quand $n \rightarrow +\infty$, en précisant à chaque fois la fonction dominante.

- a. $\int_0^{+\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)} \, dx$ (1 point)
- b. $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \, dx$, sans calcul de primitive (1 point)
- c. $\int_0^1 \frac{1 + n x}{(1+x)^n} \, dx$ (1 point)

Exercice 3 : La fonction Gamma (4 points)

On pose, lorsque cela a un sens, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$.

- a. Montrez que $t \rightarrow t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$. (1 point)
- b. Soient $0 < a < b$. Montrez que $t^{x-1} e^{-t} \leq (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t}$ pour $x \in [a, b]$ et $t > 0$. Déduisez-en que Γ est continue sur $]0, +\infty[$. (1 point)
- c. Montrez que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et donnez $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale. (1 point)
- d. Montrez que $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ pour $x > 0$, calculez $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et donnez un équivalent de $\Gamma(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$. (1 point)

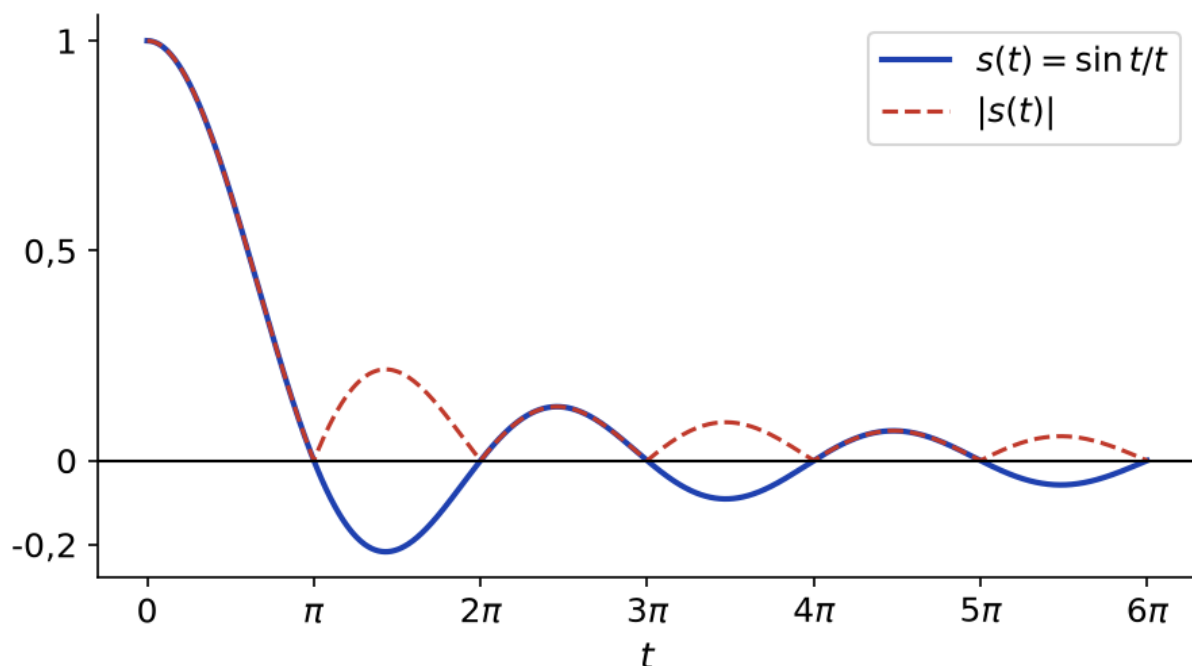
Exercice 4 : Une intégrale à paramètre calculée par équation différentielle (5 points)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- a. Montrez que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. (1 point)
- b. Montrez que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $F'(x) = -\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(xt) dt$. (1,5 point)
- c. À l'aide d'une intégration par parties, montrez que $F'(x) = -\frac{x}{2} F(x)$ pour tout réel x . (1,5 point)
- d. Déduisez-en une expression explicite de $F(x)$. (1 point)

Exercice 5 : Problème, sinus cardinal et intégrale de Lebesgue (4 points)

On considère $s(t) = \frac{\sin t}{t}$ pour $t > 0$, représentée ci-dessous avec $|s(t)|$.



a. Montrez que s est intégrable sur $]0, 1]$. (0,5 point)

b. Montrez que $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |s(t)| \, dt \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$ pour tout entier $k \geq 1$. Déduisez-en que s n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $]0, +\infty[$. (1 point)

c. Montrez que $\int_0^A s(t) \, dt$ admet une limite finie quand $A \rightarrow +\infty$: l'intégrale impropre de Riemann converge. (1 point)

d. Pour $x > 0$, on pose $G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} s(t) \, dt$. Montrez que G est définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, calculez $G'(x)$, puis la limite de G en $+\infty$. Donnez enfin $G(x)$ sous forme explicite. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : convergence dominée et intégrales à paramètre

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Intégrale de Lebesgue](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégrale de lebesgue](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : convergence monotone et lemme de Fatou](#)
- [Contrôle de maths L3 : partiel final : intégration et probabilités](#)