

Contrôle de maths L3 : complétude, espaces de Banach et point fixe

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Complétude, espaces de Banach et point fixe
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer la complétude de $C([a,b])$ pour la norme uniforme
 - Chercher : exhiber un sous-espace non fermé et un espace normé non complet
 - Calculer : estimer l'erreur d'une itération de point fixe et la comparer à l'erreur réelle
 - Modéliser : écrire une équation intégrale comme un problème de point fixe

Exercice 1 : Question de cours, complétude de $C([a,b])$ (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 2 heures.

Pour $a < b$, on note $C([a,b])$ l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $N_\infty(f) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

- Démontrez que $(C([a,b]), N_\infty)$ est un espace de Banach. (2,5 points)
- Soit (X, d) un espace métrique. Démontrez que si X est complet, toute partie fermée de X est complète, et que toute partie complète de X est fermée dans X . (1,5 point)

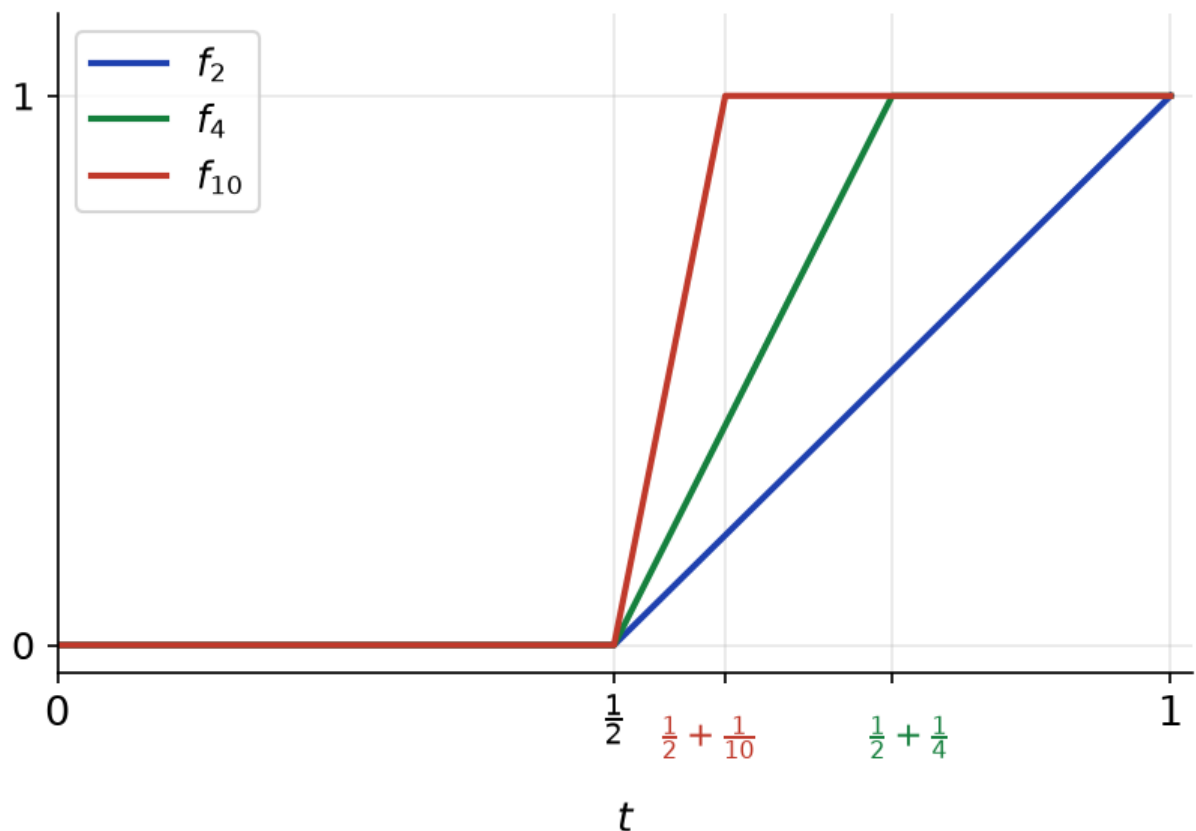
Exercice 2 : Sous-espaces fermés ou non (4 points)

On note $E = C([0,1])$, muni de N_∞ sauf mention contraire.

- a. Montrez que $H = \{f \in E : f(0) = 0\}$ est un sous-espace fermé de E . Est-il complet ? (1 point)
- b. Montrez que le sous-espace $\mathcal{P}$ des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ n'est pas fermé dans E . On pourra considérer les sommes partielles de la série de l'exponentielle. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{P}, N_\infty)$? (1,5 point)

- c. On munit maintenant E de la norme $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$. Pour $n \geq 2$, on définit

$f_n \in E$ par $f_n(t) = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, $f_n(t) = n(t - \frac{1}{2})$ sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ et $f_n(t) = 1$ sur $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$. Montrez que (f_n) est de Cauchy pour N_1 mais ne converge pas dans (E, N_1) . (1,5 point)



Exercice 3 : Séries dans un espace de Banach (4 points)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- On suppose E complet. Montrez que toute série $\sum u_n$ d'éléments de E telle que $\sum |u_n|$ converge est convergente, et que $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. (1,5 point)
- On munit $M_d(\mathbb{R})$ d'une norme subordonnée $\|\cdot\|$. Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1$. Montrez que $I_d - A$ est inversible, que $(I_d - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ et que $\|(I_d - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$. (1,5 point)
- Réciproquement, on suppose que dans E toute série absolument convergente converge. Montrez que E est complet. (1 point)

Exercice 4 : Problème, une équation intégrale de Fredholm (8 points)

On note $E = C([0,1])$ muni de N_∞ . Soit $K : [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $M = \max_{[0,1]^2} |K|$, $g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit la fonction $T(f)$ sur $[0,1]$ par

$$T(f)(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 K(x, t) f(t) dt.$$

On cherche les $f \in E$ telles que $T(f) = f$ (équation de Fredholm de seconde espèce).

- a. Montrez que $T(f) \in E$ pour tout $f \in E$. (1,5 point)
- b. Montrez que $N_\infty(T(f) - T(h)) \leq |\lambda| M N_\infty(f - h)$ pour tous $f, h \in E$. (1 point)
- c. On suppose $k = |\lambda| M < 1$. Démontrez que l'équation $T(f) = f$ admet une unique solution $f^* \in E$, que pour tout $f_0 \in E$ la suite définie par $f_{n+1} = T(f_n)$ converge vers f^* , et que $N_\infty(f_n - f^*) \leq \frac{k^n}{1-k} N_\infty(f_1 - f_0)$. (2 points)
- d. On suppose de plus $g \geq 0$, $K \geq 0$ et $\lambda \geq 0$. Montrez que $E^+ = \{f \in E : f \geq 0\}$ est un fermé de E stable par T et déduisez-en que $f^* \geq 0$. (1 point)
- e. Dans cette question et la suivante, $K(x, t) = xt$, $g(x) = x$ et $\lambda = \frac{1}{2}$. Vérifiez que $k = \frac{1}{2}$, puis déterminez f^* en la cherchant sous la forme $f^*(x) = ax$. (1,5 point)
- f. On part de $f_0 = 0$. Montrez que $f_n(x) = a_n x$ avec $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{6}$, puis exprimez $N_\infty(f_n - f^*)$ en fonction de n . Combien d'itérations la majoration de c) impose-t-elle pour garantir une erreur au plus 10^{-3} , et combien en faut-il réellement ? (1 point)



Réviser avant le contrôle : complétude, espaces de Banach et point fixe

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Complétude et point fixe](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [complétude et point fixe](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : partiel de topologie des espaces normés](#)