

Contrôle de maths L3 : compacité, théorème de Heine et connexité

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Compacité et connexité
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer les propriétés des images continues de compacts et le théorème de Heine
 - Chercher : utiliser la compacité pour obtenir un extremum ou une distance atteinte
 - Représenter : construire un chemin explicite dans un ensemble de matrices
 - Communiquer : distinguer connexité et connexité par arcs sur un contre-exemple

Exercice 1 : Question de cours, compacts et continuité (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 2 heures.

Dans tout le sujet, (E, d) et (F, δ) sont des espaces métriques. On rappelle qu'une partie d'un espace métrique est compacte si et seulement si toute suite de cette partie admet une sous-suite convergente dans cette partie.

- a. Soit K une partie compacte de E et $f : E \rightarrow F$ continue. Démontrez que $f(K)$ est une partie compacte de F . (1,5 point)

- b. Déduisez-en que toute fonction continue $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ sur un compact non vide est bornée et atteint ses bornes. (1 point)
- c. Énoncez et démontrez le théorème de Heine pour une application continue $f : K \rightarrow F$, où K est un espace métrique compact. (1,5 point)

Exercice 2 : Distance à un compact (4 points)

Pour $x \in E$ et A partie non vide de E , on note $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$, et pour deux parties non vides A et B , $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$. On admet que $x \rightarrow d(x, A)$ est 1-lipschitzienne et que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

- a. Soit K un compact non vide de E et $x \in E$. Montrez qu'il existe $k_0 \in K$ tel que $d(x, K) = d(x, k_0)$. (1 point)
- b. Soit K un compact non vide et F_0 un fermé non vide de E , disjoints. Montrez que $d(K, F_0) > 0$. (1,5 point)
- c. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, donnez deux fermés non vides disjoints dont la distance est nulle, en justifiant qu'ils sont fermés. (0,5 point)
- d. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F_0 un fermé non vide de E . Montrez que, pour tout $x \in E$, la distance $d(x, F_0)$ est atteinte. (1 point)

Exercice 3 : Le théorème de Heine en action (4 points)

- a. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrez que f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$. (2 points)
- b. Montrez que la fonction $x \rightarrow x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. (1 point)
- c. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. Montrez qu'il existe une fonction en escalier g sur

$[0,1]$ telle que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$. (1 point)

Exercice 4 : Connexité et groupes de matrices (4 points)

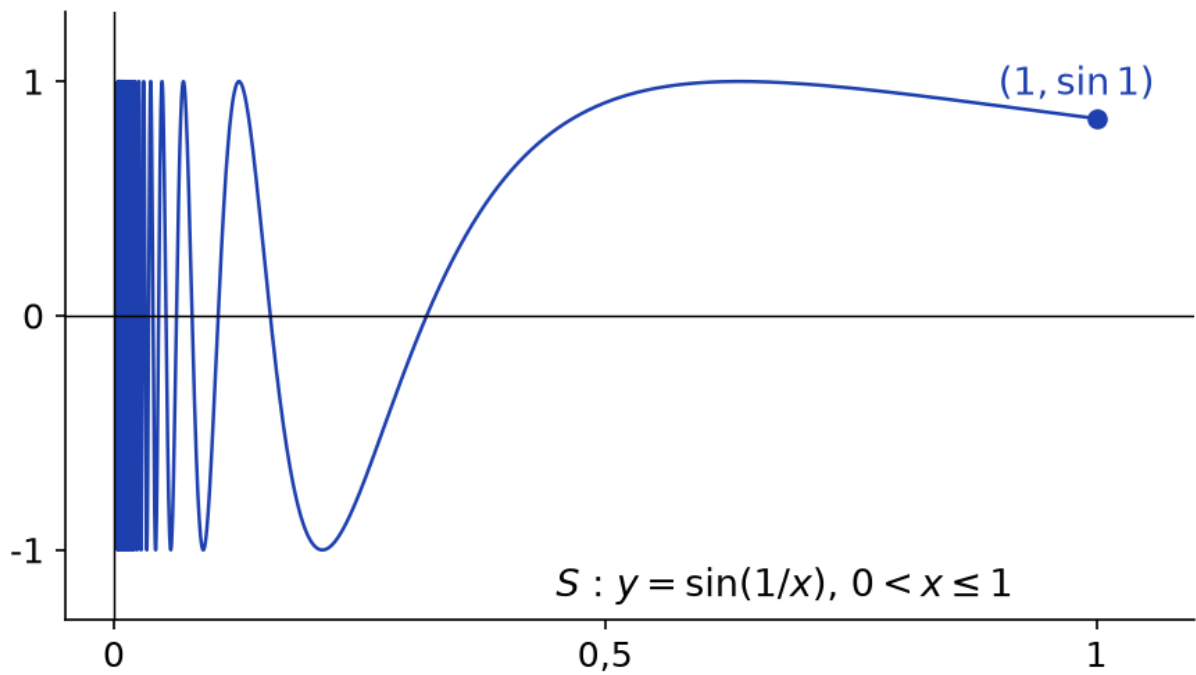
On munit $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$ (avec $n \geq 1$) d'une norme quelconque ; on rappelle que ce sont des espaces de dimension finie et que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

- Montrez que toute fonction continue $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui ne prend que des valeurs rationnelles est constante. (1 point)
- Montrez que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. (1 point)
- Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrez que $P(z) = \det((1-z)A + zB)$ est une fonction polynomiale non nulle de $z \in \mathbb{C}$, puis construisez un chemin continu de A à B dans $GL_n(\mathbb{C})$. Concluez. (2 points)

Exercice 5 : Problème, le sinus du topologue (4 points)

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, on considère

$$S = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : 0 < x \leq 1 \right\} \text{ et } T = S \cup (\{0\} \times [-1, 1]).$$



- Montrez que S est connexe par arcs. (0,5 point)
- Montrez que l'adhérence de S est T . (1,5 point)
- Déduisez-en que T est connexe. (0,5 point)
- On suppose qu'il existe un chemin continu $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0,1] \rightarrow T$ tel que $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (1, \sin 1)$. On pose $t_0 = \max\{t \in [0,1] : \gamma_1(t) = 0\}$. Justifiez l'existence de t_0 , puis montrez que γ_2 n'est pas continue en t_0 . Concluez sur la connexité par arcs de T . (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : compacité, théorème de Heine et connexité

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Compacité et connexité](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [compacité et connexité](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

[Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème](#)

- [Contrôle de maths L3 : partiel de topologie des espaces normés](#)