

Contrôle de maths L3 : Cauchy-Lipschitz, Gronwall et portrait de phase

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Équations différentielles et théorème de Cauchy-Lipschitz
- **Durée conseillée** : 2 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Communiquer : énoncer et démontrer le lemme de Gronwall, citer le théorème de Cauchy-Lipschitz avec ses hypothèses
 - Raisonner : utiliser le théorème de sortie de tout compact pour prouver qu'une solution est globale ou explose
 - Calculer : obtenir l'exponentielle d'une matrice par décomposition et résoudre un système linéaire
 - Représenter : tracer le portrait de phase d'un système autonome près de ses équilibres

Exercice 1 : Question de cours : le lemme de Gronwall (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Soit $t_0 < T$, $C \in \mathbb{R}$, et u, a deux fonctions continues sur $[t_0, T]$, avec $a \geq 0$.

- a. Énoncez le lemme de Gronwall : si $u(t) \leq C + \int_{t_0}^t a(s) u(s) ds$ pour tout $t \in [t_0, T]$,

quelle majoration de u obtient-on ? (1 point)

b. Démontrez ce lemme. On pourra étudier $v(t) = C + \int_{t_0}^t a(s) u(s) ds$ et la fonction

$$t \rightarrow v(t) e^{-A(t)}, \text{ où } A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds. \text{ (2 points)}$$

c. Soit $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et L -lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Déduisez du lemme que deux solutions de $y' = f(t, y)$ définies sur $[t_0, T]$ et égales en t_0 sont égales sur $[t_0, T]$. (1 point)

Exercice 2 : Explosion en temps fini (4 points)

On considère l'équation différentielle $y' = y^2$, avec la condition initiale $y(0) = y_0$, où $y_0 \in \mathbb{R}$.

- Justifiez que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale. (1 point)
- Traitez le cas $y_0 = 0$. Pour $y_0 \neq 0$, montrez que la solution maximale ne s'annule pas, puis déterminez son expression. (1,5 point)
- Précisez l'intervalle de définition de la solution maximale selon le signe de y_0 et son comportement aux bornes. Pourquoi parle-t-on d'explosion en temps fini ? (1,5 point)

Exercice 3 : Une solution globale par le théorème des bouts (3 points)

On considère l'équation $y' = \cos(ty)$, avec $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$. On note y la solution maximale, définie sur $]T_-, T_+[$.

- Justifiez l'existence et l'unicité de cette solution maximale. (1 point)

- b. Montrez que $|y(t) - y_0| \leq |t|$ pour tout $t \in]T_-, T_+[$. (1 point)
- c. Énoncez le théorème des bouts (ou de sortie de tout compact), puis montrez que $T_+ = +\infty$ et $T_- = -\infty$. (1 point)

Exercice 4 : Système linéaire et exponentielle de matrice (4 points)

On considère le système $X' = AX$, où $X(t) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a. On pose $N = A - I_2$. Calculez N^2 , puis N^{2m} et N^{2m+1} pour $m \in \mathbb{N}$. (1 point)
- b. Déduisez-en que $\exp(tN) = \cos(2t) I_2 + \frac{\sin(2t)}{2} N$, puis écrivez cette matrice. (1,5 point)
- c. Calculez $\exp(tA)$ en justifiant, puis la solution telle que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (1 point)
- d. Pour $X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ solution quelconque, calculez $u(t)^2 + 4v(t)^2$ en fonction de t et de $X(0)$. Décrivez les trajectoires et la stabilité de l'origine. (0,5 point)

Exercice 5 : Problème : le pendule amorti (5 points)

On étudie le système autonome, modèle d'un pendule soumis à un frottement :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x - y \end{cases}$$

On note $F(x, y) = (y, -\sin x - y)$.

- a. Montrez que F est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$. Déduisez-en que toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$. (1 point)
- b. Déterminez les points d'équilibre du système. (0,5 point)
- c. Calculez la matrice jacobienne de F en $(0,0)$ et ses valeurs propres. Déduisez-en la stabilité de cet équilibre en citant le théorème utilisé. (1,5 point)
- d. Même question en $(\pi, 0)$. (1 point)
- e. On pose $E(x,y) = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos x$. Montrez que E décroît le long de toute trajectoire. (0,5 point)
- f. Tracez l'allure du portrait de phase pour $x \in [-2\pi, 2\pi]$ et $y \in [-3, 3]$. (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : Cauchy-Lipschitz, Gronwall et portrait de phase

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Équations différentielles » en L3](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [équations différentielles](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).