Contrôle de maths L3 : anneaux, idéaux et polynômes irréductibles

Fiche du contrôle

- **Niveau :** licence L3
- **Chapitre :** Anneaux, idéaux et arithmétique
- **Durée conseillée :** 2 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 3 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 5 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : caractériser idéaux premiers et maximaux par l'anneau quotient
  - Calculer : déterminer les idéaux d'un anneau et construire un anneau quotient
  - Chercher : mener la division euclidienne dans l'anneau des entiers de Gauss
  - Raisonner : prouver l'irréductibilité d'un polynôme par Eisenstein ou modulo p

Exercice 1 : Question de cours : idéaux premiers et maximaux (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout le sujet, les anneaux sont commutatifs et unitaires. Soit A un anneau et I un idéal de A, distinct de A.

a. Rappelez les définitions d'un idéal premier et d'un idéal maximal. Démontrez ensuite que I est maximal si et seulement si l'anneau quotient A/I est un corps. *(2 points)*

b. On admet que I est premier si et seulement si A/I est intègre. Déduisez-en que tout idéal maximal est premier. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 2 : Les idéaux de Z/12Z (3 points)

On note $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ la surjection canonique.

a. Montrez que les idéaux de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sont exactement les $\pi(d\,\mathbb{Z})$, où d est un diviseur positif de 12. Donnez-en la liste. *(1,5 point)*

b. Pour chacun de ces idéaux, identifiez l'anneau quotient. Déterminez ensuite les idéaux premiers et les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. *(1,5 point)*

Exercice 3 : Idéaux de Z[X] et anneau quotient R[X]/(X²+1) (4 points)

a. À l'aide du morphisme $P \to P(0)$, montrez que $\mathbb{Z}[X]/(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Déduisez-en que l'idéal (X) est premier mais n'est pas maximal. *(1,5 point)*

b. Montrez que l'idéal $(2, X)$ est maximal dans $\mathbb{Z}[X]$. *(1 point)*

c. Montrez que l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}$. *(1,5 point)*

Exercice 4 : L'anneau des entiers de Gauss (5 points)

On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + i\,b \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ et, pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) = z\,\overline{z} = a^2 + b^2$.

a. Montrez que $N(z\,w) = N(z)\,N(w)$. Déduisez-en que les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont 1, -1, i et $-i$. *(1 point)*

b. Montrez que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien pour le stathme N. Pour z et $w \neq 0$, vous approcherez le complexe $\frac{z}{w}$ par un élément q de $\mathbb{Z}[i]$. *(1,5 point)*

c. Décomposez 5 et 13 en produits d'irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$. Justifiez l'irréductibilité des facteurs obtenus. *(1,5 point)*

d. Montrez que 3 est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$. *(1 point)*

Exercice 5 : Problème : irréductibilité de polynômes à coefficients entiers (5 points)

On admet le lemme de Gauss : si un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ est le produit de deux polynômes unitaires non constants de $\mathbb{Q}[X]$, alors ces deux facteurs sont à coefficients entiers.

a. Énoncez le critère d'Eisenstein. Appliquez-le pour montrer que $X^5 - 6X + 3$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. *(1 point)*

b. Soit $\Phi = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Calculez $\Phi(X+1)$, puis montrez que Φ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. *(1,5 point)*

c. Montrez que $X^3 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$. *(1 point)*

d. Soit $S = X^3 - 4X^2 + 7X + 9$. En réduisant S modulo 2, montrez que S est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. *(1,5 point)*

Réviser avant le contrôle : anneaux, idéaux et polynômes irréductibles

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Anneaux et idéaux » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** anneaux et idéaux.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L3** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- Contrôle de maths L3 : partiel d'algèbre : groupes, anneaux et corps