

Contrôle de maths L3 : anneaux, idéaux et polynômes irréductibles

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Anneaux, idéaux et arithmétique
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 3 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 5 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : caractériser idéaux premiers et maximaux par l'anneau quotient
 - Calculer : déterminer les idéaux d'un anneau et construire un anneau quotient
 - Chercher : mener la division euclidienne dans l'anneau des entiers de Gauss
 - Raisonner : prouver l'irréductibilité d'un polynôme par Eisenstein ou modulo p

Exercice 1 : Question de cours : idéaux premiers et maximaux (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout le sujet, les anneaux sont commutatifs et unitaires. Soit A un anneau et I un idéal de A , distinct de A .

- Rappelez les définitions d'un idéal premier et d'un idéal maximal. Démontrez ensuite que I est maximal si et seulement si l'anneau quotient A/I est un corps. (2 points)
- On admet que I est premier si et seulement si A/I est intègre. Déduisez-en que tout idéal maximal est premier. (1 point)

Exercice 2 : Les idéaux de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (3 points)

On note $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ la surjection canonique.

- Montrez que les idéaux de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sont exactement les $\pi(d\mathbb{Z})$, où d est un diviseur positif de 12. Donnez-en la liste. (1,5 point)
- Pour chacun de ces idéaux, identifiez l'anneau quotient. Déterminez ensuite les idéaux premiers et les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. (1,5 point)

Exercice 3 : Idéaux de $\mathbb{Z}[X]$ et anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ (4 points)

- À l'aide du morphisme $P \rightarrow P(0)$, montrez que $\mathbb{Z}[X]/(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Déduisez-en que l'idéal (X) est premier mais n'est pas maximal. (1,5 point)
- Montrez que l'idéal $(2, X)$ est maximal dans $\mathbb{Z}[X]$. (1 point)
- Montrez que l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}$. (1,5 point)

Exercice 4 : L'anneau des entiers de Gauss (5 points)

On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ et, pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) = z \bar{z} = a^2 + b^2$.

- Montrez que $N(zw) = N(z)N(w)$. Déduisez-en que les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont 1 , -1 , i et $-i$. (1 point)

- b. Montrez que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien pour le stathme N . Pour z et $w \neq 0$, vous approcherez le complexe $\frac{z}{w}$ par un élément q de $\mathbb{Z}[i]$. (1,5 point)
- c. Décomposez 5 et 13 en produits d'irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$. Justifiez l'irréductibilité des facteurs obtenus. (1,5 point)
- d. Montrez que 3 est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$. (1 point)

Exercice 5 : Problème : irréductibilité de polynômes à coefficients entiers (5 points)

On admet le lemme de Gauss : si un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ est le produit de deux polynômes unitaires non constants de $\mathbb{Q}[X]$, alors ces deux facteurs sont à coefficients entiers.

- a. Énoncez le critère d'Eisenstein. Appliquez-le pour montrer que $X^5 - 6X + 3$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. (1 point)
- b. Soit $\Phi = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Calculez $\Phi(X + 1)$, puis montrez que Φ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. (1,5 point)
- c. Montrez que $X^3 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$. (1 point)
- d. Soit $S = X^3 - 4X^2 + 7X + 9$. En réduisant S modulo 2, montrez que S est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : anneaux, idéaux et polynômes irréductibles

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Anneaux et idéaux](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [anneaux et idéaux](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : partiel d'algèbre : groupes, anneaux et corps](#)