

Contrôle de maths L2 : variables aléatoires discrètes

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Variables aléatoires discrètes
- **Durée conseillée** : 2 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 3 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Communiquer : énoncer et démontrer les inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev et la loi faible des grands nombres
 - Calculer : obtenir espérance, variance et covariance à l'aide du théorème de transfert et des séries
 - Raisonner : déterminer la loi d'une somme ou d'un minimum de variables indépendantes
 - Modéliser : décomposer un temps d'attente en somme de variables géométriques indépendantes

Exercice 1 : Question de cours : Markov, Bienaymé-Tchebychev et loi faible (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Toutes les variables aléatoires sont discrètes et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Soit X une variable aléatoire positive admettant une espérance, et $a > 0$. Énoncez et démontrez l'inégalité de Markov. (1,5 point)
- Déduisez-en l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable X admettant une variance. (1

point)

- c. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance m et de variance σ^2 . On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Énoncez et démontrez la loi faible des grands nombres pour $\frac{S_n}{n}$. (1,5 point)

Exercice 2 : Couple de variables et covariance (3 points)

Le couple (X, Y) prend ses valeurs dans $\{0, 1\} \times \{0, 1, 2\}$ avec la loi conjointe suivante.

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$X = 1$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

- Déterminez les lois marginales de X et de Y . (0,5 point)
- Calculez $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, puis la covariance $\text{Cov}(X, Y)$. (1 point)
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Que retenir-vous de cet exemple ? (0,5 point)
- Calculez $V(X)$, $V(Y)$, puis $V(X+Y)$. (1 point)

Exercice 3 : Fonctions génératrices et lois de Poisson (4 points)

Pour une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note $G_X(t) = E(t^X)$ sa fonction génératrice. Soit $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

- Soit X de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Démontrez que $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ pour tout réel t . (1 point)
- Retrouvez $E(X)$ et $V(X)$ à l'aide de G_X . (1 point)
- Soit Y de loi $\mathcal{P}(\mu)$, indépendante de X . Déterminez la loi de $X + Y$ à l'aide des fonctions génératrices. (1 point)
- Un standard reçoit sur sa première ligne un nombre d'appels par heure qui suit la loi $\mathcal{P}(3)$, et sur sa seconde ligne un nombre qui suit la loi $\mathcal{P}(2)$, les deux étant indépendants. Calculez la probabilité que le standard reçoive au plus un appel en une heure. (0,5 point)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminez la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = n$. (0,5 point)

Exercice 4 : Loi géométrique et absence de mémoire (4 points)

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. La variable X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:
 $P(X = k) = q^{k-1} p$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. On admet que, pour $|x| < 1$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

- Vérifiez que ces nombres définissent bien une loi de probabilité. (0,5 point)
- Démontrez que X admet une espérance et que $E(X) = \frac{1}{p}$. (1 point)
- Calculez $E(X(X-1))$, puis démontrez que $V(X) = \frac{q}{p^2}$. (1 point)
- Calculez $P(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis démontrez que
 $P(X > n)(X > n + m) = P(X > m)$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$. (0,5 point)
- Alice lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un six ; au même rythme, Bruno lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir pile. On note X et Y les rangs de leurs premiers succès, supposés indépendants, et $Z = \min(X, Y)$ le rang du premier succès de l'un des deux. Déterminez la

loi de $\mathbb{Z}$ et son espérance. (1 point)

Exercice 5 : Problème : le temps de collection de vignettes (5 points)

Un album comporte $N \geq 2$ vignettes différentes. Chaque paquet acheté contient une vignette, choisie au hasard parmi les N de façon équiprobable, indépendamment des autres paquets. On note T_N le nombre de paquets nécessaires pour compléter l'album.

Pour $1 \leq k \leq N$, on note X_k le nombre de paquets achetés après l'obtention de la $(k-1)$ -ième vignette distincte, jusqu'à l'obtention de la k -ième (inclus). Ainsi $X_1 = 1$ et

$T_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$. On admet que les variables $X_1, \dots, X_N$ sont indépendantes.

On note $H_N = \sum_{j=1}^N \frac{1}{j}$.

- Expliquez pourquoi X_k suit la loi géométrique de paramètre $\frac{N-k+1}{N}$. (1 point)
- Démontrez que $E(T_N) = N H_N$. Calculez cette espérance pour $N = 4$. (1 point)
- Démontrez que $V(T_N) \leq N^2 \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^2}$, puis que $V(T_N) \leq 2N^2$. (1,5 point)
- Soit $\epsilon > 0$. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, démontrez que $P(|T_N - N H_N| \geq \epsilon N H_N) \leq \frac{2}{\epsilon^2 H_N^2}$. Déduisez-en la limite de cette probabilité quand $N \rightarrow +\infty$ et interprétez. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : variables aléatoires discrètes

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Variables aléatoires discrètes](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [variables aléatoires discrètes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).