

Contrôle de maths L2 : variables aléatoires à densité

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Variables aléatoires à densité
- **Durée conseillée** : 2 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3,5 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3,5 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : normaliser une densité, en déduire la fonction de répartition, l'espérance et la variance
 - Raisonner : justifier l'existence d'un moment par la convergence absolue d'une intégrale généralisée
 - Modéliser : déterminer la loi de $g(X)$ par la méthode de la fonction muette
 - Chercher : obtenir la loi d'une somme de variables indépendantes par un produit de convolution

Exercice 1 : Question de cours : moments de la loi exponentielle (3,5 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

- a. Donnez la définition d'une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et celle de la fonction de répartition F_X d'une variable X de densité f . Rappelez le lien entre F_X et f en un point où f est continue. (1 point)
- b. Soit $\lambda > 0$ et X une variable de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Démontrez que X admet une espérance et une variance, et que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Vous justifierez la convergence absolue de chaque intégrale. (2,5 points)

Exercice 2 : Une densité à queue lourde (4 points)

Soit c un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{c}{(1+x)^3}$ si $x \geq 0$, et $f(x) = 0$ si $x < 0$.

- Déterminez c pour que f soit une densité de probabilité. (1 point)
- Soit X une variable de densité f . Calculez sa fonction de répartition F_X . (1 point)
- Calculez $P(X > 1)$ et la médiane de X , c'est-à-dire le réel m tel que $F_X(m) = \frac{1}{2}$. (0,5 point)
- Montrez que X admet une espérance et calculez-la (on pourra écrire $\frac{x}{(1+x)^3} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}$). (1 point)
- La variable X admet-elle une variance ? (0,5 point)

Exercice 3 : Loi de $g(X)$ par la fonction muette (4 points)

On rappelle la méthode de la fonction muette : si, pour toute fonction h continue bornée sur $\mathbb{R}$, on a

$$E(h(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) g(y) dy, \text{ alors } Y \text{ admet } g \text{ pour densité.}$$

- Soit U de loi uniforme sur $]0, 1[$ et $\lambda > 0$. Montrez que $Y = -\frac{\ln U}{\lambda}$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. (1,5 point)
- Soit X de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, de densité $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Montrez que $Y = X^2$ admet une densité et déterminez-la. (1,5 point)

- c. Soit $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et X de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Montrez que $\frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. (1 point)

Exercice 4 : Un couple à densité sur le carré unité (3,5 points)

Soit (X, Y) un couple de densité $f(x, y) = x + y$ si $(x, y) \in [0, 1]^2$, et $f(x, y) = 0$ sinon.

- Vérifiez que f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$. (0,5 point)
- Déterminez les densités marginales de X et de Y . (1 point)
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? (0,5 point)
- Calculez $P(X \leq Y)$ et $P(X + Y \leq 1)$. (1 point)
- Calculez la covariance de X et Y . (0,5 point)

Exercice 5 : Problème : somme et minimum de deux durées de vie (5 points)

Un appareil contient un composant principal et un composant de secours. Leurs durées de vie, en années, sont deux variables indépendantes X et Y , de lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$, avec $\lambda, \mu > 0$. On admet que si X et Y sont indépendantes de densités f_X et f_Y , alors

$S = X + Y$ a pour densité le produit de convolution
$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(s-t) dt.$$

- On suppose $\lambda = \mu$. Montrez que S a pour densité $f_S(s) = \lambda^2 s e^{-\lambda s}$ pour $s \geq 0$, et $f_S(s) = 0$ sinon. (1,5 point)
- Toujours avec $\lambda = \mu$, calculez $E(S)$ à l'aide de f_S , puis vérifiez le résultat par linéarité de

l'espérance. (1 point)

- c. On suppose $\lambda \neq \mu$. Déterminez la densité de S . Pour $\lambda = 1$ et $\mu = 2$, calculez la probabilité que l'appareil tombe en panne définitive avant un an, c'est-à-dire $P(S \leq 1)$. (1 point)
- d. Dans un autre montage, les deux composants fonctionnent en même temps et l'appareil s'arrête à la première panne, à l'instant $M = \min(X, Y)$. Déterminez la loi de M , puis calculez $P(X < Y)$. Donnez les valeurs numériques pour $\lambda = 1$ et $\mu = 2$. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : variables aléatoires à densité

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Variables aléatoires à densité](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [variables aléatoires à densité](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).