

## Contrôle de maths L2 : valeurs propres et diagonalisation

### Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Valeurs propres et diagonalisation
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 6 points)
- **Compétences évaluées** :
  - Raisonner : démontrer que les sous-espaces propres sont en somme directe
  - Calculer : polynôme caractéristique, sous-espaces propres et puissances de matrices
  - Chercher : discuter la diagonalisabilité selon un paramètre
  - Modéliser : traduire des suites récurrentes couplées sous forme matricielle

### Exercice 1 : Question de cours, sous-espaces propres en somme directe (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 2 heures.

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Pour une valeur propre  $\lambda$ , on note  $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{id}_E)$ .

- Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ . Démontrez par récurrence sur  $p$  que, si  $x_1 + \dots + x_p = 0$  avec  $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$  pour tout  $i$ , alors tous les  $x_i$  sont nuls. Que peut-on en déduire sur la somme des sous-espaces propres ? (2 points)
- Déduisez-en que, si  $u$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $u$  est diagonalisable. (1 point)

- c. Démontrez que  $u$  est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à  $n$ . (1 point)

### Exercice 2 : Une matrice diagonalisable et une qui ne l'est pas (5 points)

On considère les matrices réelles

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & \\ 1 & -1 & 3,3 \end{pmatrix}.$$

On note  $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M)$  le polynôme caractéristique d'une matrice  $M$ .

- Calculez  $\chi_A$  sous forme factorisée. On pourra remplacer la première colonne de  $A - \lambda I_3$  par la somme des trois colonnes. (1,5 point)
- Déterminez une base de chaque sous-espace propre de  $A$ , puis une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = PDP^{-1}$ . (1,5 point)
- Montrez que  $\chi_B(\lambda) = (\lambda - 2)^3$ . Déterminez la dimension du sous-espace propre  $E_2(B)$  et concluez :  $B$  est-elle diagonalisable ? (2 points)

### Exercice 3 : Une matrice à paramètre et ses puissances (5 points)

Pour tout réel  $a$ , on pose

$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & a & -a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Donnez les valeurs propres de  $M_\alpha$  et leurs multiplicités algébriques. (0,5 point)
- Déterminez, selon  $\alpha$ , le rang de  $M_\alpha - 2I_3$ , puis la dimension de  $E_2(M_\alpha)$ . Donnez aussi la dimension de  $E_1(M_\alpha)$ . (1,5 point)
- Déduisez-en les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles  $M_\alpha$  est diagonalisable. (1 point)
- Dans cette question et la suivante,  $\alpha = 1$ . Trouvez  $P$  inversible et  $D$  diagonale telles que  $M_1 = PDP^{-1}$ , et calculez  $P^{-1}$ . (1 point)
- Calculez  $M_1^n$  pour tout entier  $n \geq 0$ . (1 point)

#### Exercice 4 : Problème, trois réservoirs couplés (6 points)

Trois réservoirs contiennent au départ  $u_0 = 60$ ,  $v_0 = 30$  et  $w_0 = 0$  litres d'eau. À chaque étape, chaque réservoir garde la moitié de son contenu et en verse un quart dans chacun des deux autres. On note  $u_n$ ,  $v_n$ ,  $w_n$  les volumes après  $n$  étapes, de sorte que

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{v_n + w_n}{4}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + \frac{u_n + w_n}{4}, \quad w_{n+1} = \frac{w_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{4}.$$

On note  $J$  la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients valent 1.

- Écrivez le système sous la forme  $X_{n+1} = AX_n$ , avec  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ , et vérifiez que  $A = \frac{1}{4}(I_3 + J)$ . Exprimez  $X_n$  en fonction de  $A$ ,  $n$  et  $X_0$ . (0,5 point)
- Déterminez les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $J$ , puis ceux de  $A$ . Justifiez que  $A$  est diagonalisable. (2 points)
- On pose  $Q = \frac{1}{3}J$ . Montrez que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $A^n = Q + \frac{1}{4^n}(I_3 - Q)$ . On pourra comparer les deux membres sur une base de vecteurs propres. (1,5 point)
- Déduisez-en  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n$ , puis leurs limites. (1 point)
- Montrez que  $u_n + v_n + w_n$  ne dépend pas de  $n$  et interprétez le résultat de la question d). À partir de quelle étape l'écart entre  $u_n$  et  $w_n$  est-il inférieur à 1 litre ? (1 point)



## **Réviser avant le contrôle : valeurs propres et diagonalisation**

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Diagonalisation » en L2](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [diagonalisation](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).