

Contrôle de maths L2 : séries numériques à termes positifs

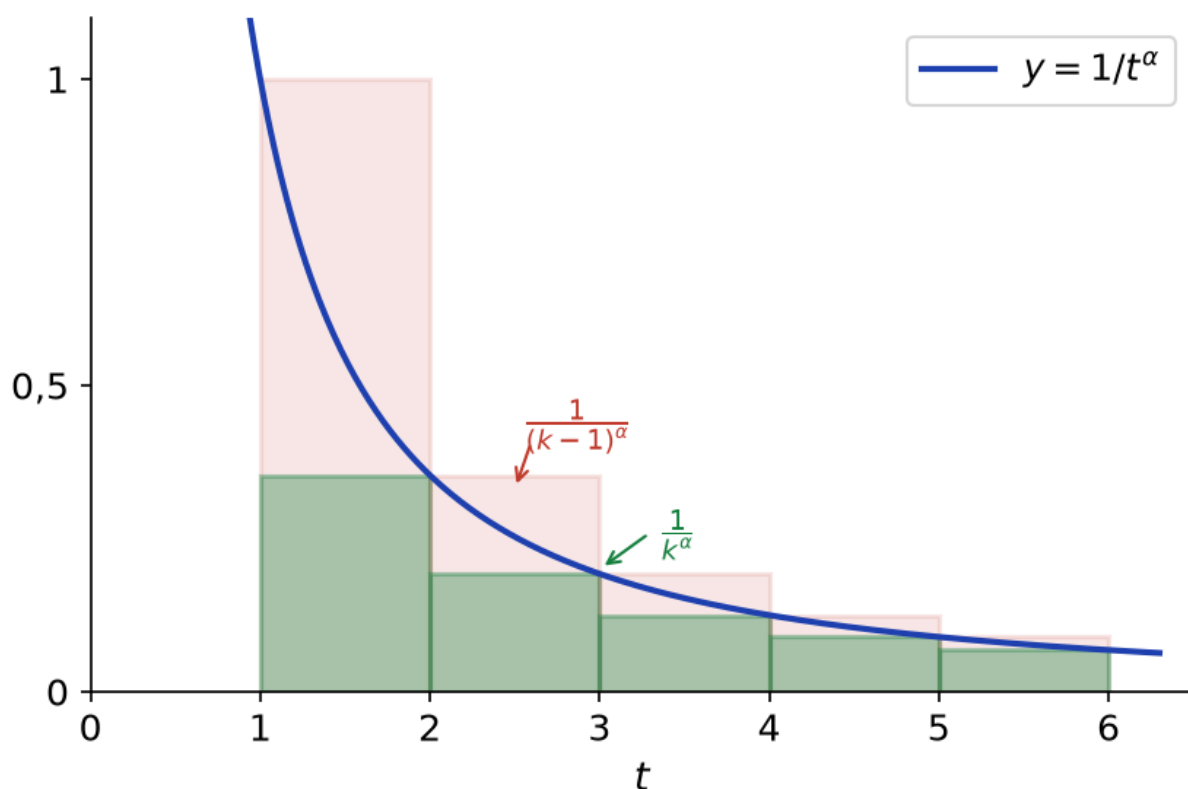
Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Séries numériques à termes positifs
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer le critère de Riemann par comparaison à une intégrale
 - Calculer : obtenir des équivalents et des limites de rapports
 - Chercher : choisir le bon critère de convergence et vérifier ses hypothèses
 - Modéliser : encadrer une somme partielle ou un reste par des intégrales

Exercice 1 : Question de cours, le critère de Riemann (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 2 heures.

Soit α un réel strictement positif. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.



- a. Montrez que, pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{(k-1)^\alpha}$. (1 point)
- b. On suppose $\alpha > 1$. Montrez que la suite (S_n) est majorée par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ et concluez sur la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. (1,5 point)
- c. On suppose $0 < \alpha \leq 1$. Montrez que $S_{n-1} \geq \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$ pour $n \geq 2$ et concluez. Que dire enfin du cas $\alpha \leq 0$? (1,5 point)

Exercice 2 : Nature de cinq séries (5 points)

Déterminez la nature de la série de terme général u_n (pour $n \geq 1$) dans chacun des cas suivants. Chaque réponse doit citer le critère utilisé et vérifier ses hypothèses.

- a. $u_n = \frac{n+1}{n^3+2}$ (1 point)
- b. $u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ (1 point)
- c. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (1 point)
- d. $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ (1 point)
- e. $u_n = \frac{n!}{n^n}$ (1 point)

Exercice 3 : Deux séries à paramètre (3 points)

Dans cet exercice, α désigne un réel.

- a. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = n^\alpha \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \right)$. Justifiez que $u_n > 0$, puis déterminez, selon α , la nature de $\sum u_n$. (1,5 point)
- b. Pour $n \geq 1$, on pose $w_n = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$. Déterminez, selon α , la nature de $\sum w_n$. On pourra utiliser la règle de Cauchy lorsque $\alpha > 0$. (1,5 point)

Exercice 4 : Encadrer deux sommes partielles (3 points)

Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $L_n = \sum_{k=1}^n \ln k = \ln(n!)$.

- a. En comparant la série à une intégrale, montrez que $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$, puis que $H_n \sim \ln n$ quand $n \rightarrow +\infty$. (1,5 point)

- b. Montrez de même que $n \ln n - n + 1 \leq L_n \leq (n+1)\ln(n+1) - n$, puis que $\ln(n!) \sim n \ln n$. (1,5 point)

Exercice 5 : Problème, équivalent du reste d'une série de Riemann (5 points)

Soit $\alpha > 1$. Pour $n \geq 1$, on note $R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ le reste d'ordre n de la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{k^\alpha}$.

- a. Montrez que $\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^\alpha - 1} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^\alpha - 1}$, puis que $R_n(\alpha) \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^\alpha - 1}$. (2 points)

- b. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n \geq 1} R_n(\alpha)$ converge-t-elle ? (1 point)

- c. On se place dans le cas $\alpha = 2$. Vérifiez que, pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2(k-1)}$. (0,5 point)

- d. En déduire que $\frac{1}{n} - R_n(2) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)}$. (0,5 point)

- e. À l'aide du théorème de sommation des relations de comparaison et de la question a), montrez que $R_n(2) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : séries numériques à termes positifs

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Séries à termes positifs](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries à termes positifs](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : comparaison série-intégrale et restes](#)