

Contrôle de maths L2 : séries entières et rayon de convergence

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Séries entières
- **Durée conseillée** : 2 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer le lemme d'Abel et l'invariance du rayon par dérivation
 - Calculer : déterminer un rayon de convergence par la règle de d'Alembert ou par comparaison
 - Calculer : obtenir la somme d'une série entière par dérivation et intégration terme à terme
 - Modéliser : résoudre une équation différentielle linéaire en cherchant une solution développable en série entière

Exercice 1 : Question de cours : lemme d'Abel et série dérivée (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans tout le sujet, $(a_n)_n \geq 0$ désigne une suite de nombres complexes et R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

- a. Énoncez et démontrez le lemme d'Abel : si la suite $(a_n r_0^n)$ est bornée pour un réel $r_0 > 0$,

alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout complexe z tel que $|z| < r_0$. (2 points)

- b. Démontrez que la série entière dérivée $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence R que $\sum a_n z^n$. (2 points)

Exercice 2 : Quatre rayons de convergence (4 points)

Déterminez le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes, en justifiant soigneusement.

- a. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n} z^n$. (1 point)
- b. $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^n$. (1 point)
- c. $\sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{4^n (n+1)}$. (1 point)
- d. $\sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n$. On pourra commencer par démontrer que la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0. (1 point)

Exercice 3 : Sommes de séries entières (4 points)

Dans cet exercice, x désigne un réel.

- a. Justifiez que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\sum_{n \geq 1} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, puis calculez

$$\sum_{n \geq 1} n^2 x^n . (2 \text{ points})$$

b. En déduire la valeur de $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{2^n}$. (0,5 point)

c. Déterminez le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$, puis exprimez sa somme $S(x)$ à l'aide de fonctions usuelles pour $x \in]-1, 1[$. (1,5 point)

Exercice 4 : Développements en série entière (3 points)

a. Décomposez en éléments simples $f(x) = \frac{1}{(1-x)(2-x)}$, puis développez f en série entière au voisinage de 0 . Précisez le rayon de convergence obtenu. (1,5 point)

b. Développez en série entière la fonction arc tangente au voisinage de 0 , en précisant le rayon de convergence et le théorème utilisé. (1,5 point)

Exercice 5 : Problème : une équation différentielle résolue par série entière (5 points)

On considère l'équation différentielle linéaire

$$(E) : 4x y''(x) + 2 y'(x) - y(x) = 0 .$$

On cherche d'abord les solutions de (E) sur $] -R, R[$ de la forme $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, où la série entière a un rayon $R > 0$.

a. Démontrez qu'une telle fonction est solution de (E) si et seulement si $2n(2n-1) a_n = a_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$. (1,5 point)

b. Exprimez a_n en fonction de a_0 et de n , déterminez le rayon de convergence de la série

obtenue, puis exprimez sa somme à l'aide de fonctions usuelles, séparément pour $x \geq 0$ et pour $x < 0$. (1,5 point)

- c. Vérifiez que la fonction $h : x \rightarrow \operatorname{sh}(\sqrt{x})$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$. Est-elle la restriction d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0 ? (1 point)
- d. Déterminez toutes les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$. Lesquelles se prolongent en une fonction développable en série entière au voisinage de 0 ? (1 point)



Réviser avant le contrôle : séries entières et rayon de convergence

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Séries entières](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries entières](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : partiel de S4, séries entières et de Fourier](#)