

Contrôle de maths L2 : séries de Fourier et égalité de Parseval

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Séries de Fourier
- **Durée conseillée** : 2 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 7 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : énoncer les théorèmes de Dirichlet et de Parseval et démontrer la convergence normale
 - Calculer : obtenir les coefficients de Fourier en exploitant la parité
 - Chercher : choisir le point où appliquer le théorème de Dirichlet pour obtenir une somme
 - Calculer : déduire de l'égalité de Parseval des sommes de séries numériques

Exercice 1 : Question de cours : Dirichlet, Parseval et convergence normale (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans tout le sujet, pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π -périodique, on note, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$,

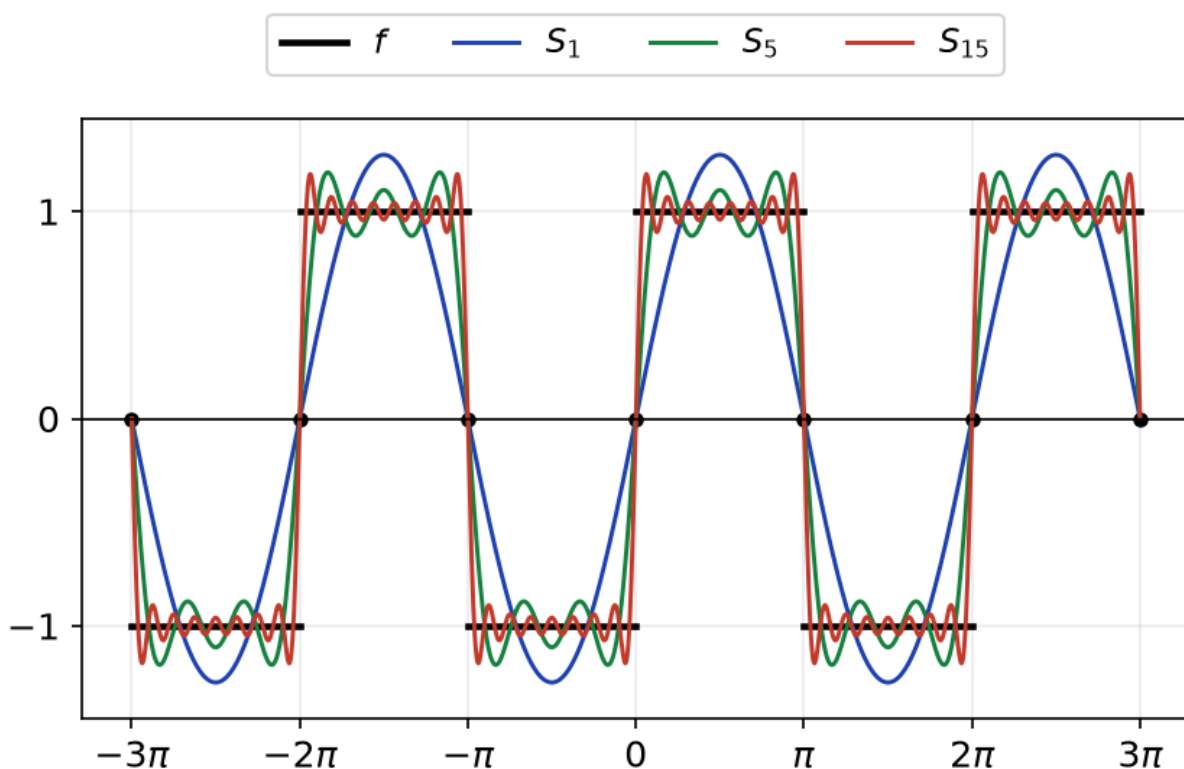
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt,$$

et $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$ la somme partielle d'ordre N .

- Énoncez le théorème de Dirichlet pour une fonction 2π -périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. (1 point)
- Énoncez l'égalité de Parseval, avec les coefficients c_n puis avec les coefficients a_k et b_k pour une fonction à valeurs réelles. (1 point)
- On suppose f continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Démontrez que $c_n(f') = in c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. (1 point)
- Sous les mêmes hypothèses, démontrez que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge, puis que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. (1 point)

Exercice 2 : Le signal créneau (5 points)

On note f la fonction 2π -périodique impaire définie par $f(t) = 1$ pour $t \in]0, \pi[$, $f(0) = f(\pi) = 0$.



a. Calculez les coefficients $a_k(f)$ et $b_k(f)$. (2 points)

b. Justifiez que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{\sin((2p+1)x)}{2p+1}$, puis calculez $\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.
(1,5 point)

c. À l'aide de l'égalité de Parseval, calculez $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$, puis retrouvez la valeur de $\zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. (1,5 point)

Exercice 3 : Valeur absolue du sinus (4 points)

On considère la fonction $g : x \rightarrow |\sin x|$, continue et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.

a. Démontrez que $b_k(g) = 0$ pour tout k , que $a_k(g) = 0$ pour k impair, et que $a_0(g) = \frac{4}{\pi}$ et $a_{2p}(g) = -\frac{4}{\pi(4p^2 - 1)}$ pour $p \geq 1$. (2 points)

b. Justifiez que la série de Fourier de g converge normalement vers g , puis calculez $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{4p^2 - 1}$ de deux manières. (1 point)

c. Calculez $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{(4p^2 - 1)^2}$. (1 point)

Exercice 4 : Problème : dent de scie, parabole et zêta de 4 (7 points)

On note φ la fonction 2π -périodique définie par $\varphi(t) = t$ pour $t \in]-\pi, \pi[$ et $\varphi(\pi) = 0$ (dent de scie), et h la fonction 2π -périodique définie par $h(t) = t^2$ pour $t \in [-\pi, \pi]$.

- a. Calculez les coefficients $a_k(\varphi)$ et $b_k(\varphi)$. (1,5 point)
- b. Dédisez de l'égalité de Parseval appliquée à φ la valeur de $\zeta(2)$. (1 point)
- c. Justifiez que h est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, avec $h' = 2\varphi$ sauf en un nombre fini de points par période. Dédisez-en les coefficients de Fourier de h : $a_0(h) = \frac{2\pi^2}{3}$ et $a_k(h) = \frac{4(-1)^k}{k^2}$ pour $k \geq 1$. (2 points)
- d. Écrivez l'égalité entre h et sa série de Fourier en justifiant la convergence. En choisissant deux valeurs de x , calculez $\zeta(2)$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. (1,5 point)
- e. En appliquant l'égalité de Parseval à h , démontrez que $\zeta(4) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : séries de Fourier et égalité de Parseval

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Séries de Fourier » en L2](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries de fourier](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : partiel de S4, séries entières et de Fourier](#)