

Contrôle de maths L2 : séries alternées et semi-convergence

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Séries à termes quelconques
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 3 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer le critère spécial des séries alternées et la majoration du reste
 - Calculer : mener un développement asymptotique du terme général
 - Chercher : distinguer convergence et convergence absolue
 - Communiquer : vérifier explicitement les hypothèses de chaque critère

Exercice 1 : Question de cours, le critère spécial des séries alternées (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 2 heures.

Soit $(a_n)_n \geq 0$ une suite réelle décroissante de limite nulle. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$.

- Énoncez le critère spécial des séries alternées, y compris la majoration du reste et son signe. (1 point)
- Démontrez que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, et concluez à la convergence

de $\sum (-1)^n a_n$. (2 points)

- c. On note S la somme et $R_n = S - S_n$. Démontrez que $|R_n| \leq a_{n+1}$ et que R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$. (1 point)

Exercice 2 : Critère de Cauchy et convergence absolue (3 points)

- a. Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrez que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ et déduisez-en, par le critère de Cauchy, que la série harmonique diverge. (1 point)
- b. Démontrez, à l'aide du critère de Cauchy, qu'une série réelle absolument convergente est convergente. (1 point)
- c. Étudiez la convergence absolue et la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$. (1 point)

Exercice 3 : Séries de Bertrand et développement asymptotique (5 points)

- a. Soit $\beta > 0$. Par comparaison à une intégrale, déterminez selon β la nature de la série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$. (1,5 point)
- b. Montrez que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ est semi-convergente. (1 point)
- c. Soit $\alpha > 0$. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$. Justifiez que u_n est bien défini, puis montrez que $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n$ avec $v_n = -\frac{1}{n^\alpha(n^\alpha + (-1)^n)}$. (1 point)
- d. Déduisez-en, selon α , la nature de $\sum u_n$: absolument convergente, semi-convergente ou divergente. (1,5 point)

Exercice 4 : Un produit de Cauchy divergent (3 points)

Pour $n \geq 0$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ (produit de Cauchy de $\sum a_n$ par elle-même).

- Montrez que $\sum a_n$ converge. Est-elle absolument convergente ? (0,5 point)
- Montrez que $c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$, puis que $|c_n| \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$. (1,5 point)
- Concluez sur la nature de $\sum c_n$. Quelle hypothèse du théorème sur le produit de Cauchy fait défaut ici ? (1 point)

Exercice 5 : Problème, transformation d'Abel pour la série de $\sin(n)/n$ (5 points)

Pour $n \geq 1$, on note $T_n = \sum_{k=1}^n \sin k$ et on pose $T_0 = 0$.

- En écrivant T_n comme la partie imaginaire d'une somme géométrique, montrez que $|T_n| \leq \frac{1}{\sin(1/2)}$ pour tout n . (1,5 point)
- Transformation d'Abel : en écrivant $\sin k = T_k - T_{k-1}$, montrez que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k} = \frac{T_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} T_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

(1,5 point)

c. Déduisez-en que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$ converge. (1 point)

d. En utilisant $|\sin n| \geq \sin^2 n = \frac{1 - \cos(2n)}{2}$ et en admettant que $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n)}{n}$ converge (même méthode), montrez que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$ n'est pas absolument convergente. (1 point)



Réviser avant le contrôle : séries alternées et semi-convergence

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Séries à termes quelconques](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries à termes quelconques](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).