# Contrôle de maths L2 : séries alternées et semi-convergence

## Fiche du contrôle

- **Niveau :** licence L2
- **Chapitre :** Séries à termes quelconques
- **Durée conseillée :** 2 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 3 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : démontrer le critère spécial des séries alternées et la majoration du reste
  - Calculer : mener un développement asymptotique du terme général
  - Chercher : distinguer convergence et convergence absolue
  - Communiquer : vérifier explicitement les hypothèses de chaque critère

## Exercice 1 : Question de cours, le critère spécial des séries alternées (4 points)

*Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 2 heures.*

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

a. Énoncez le critère spécial des séries alternées, y compris la majoration du reste et son signe. *(1 point)*

b. Démontrez que les suites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes, et concluez à la convergence

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

de $\sum (-1)^n a_n$ . *(2 points)*

c. On note $S$ la somme et $R_n = S - S_n$ . Démontrez que $|R_n| \leq a_{n+1}$ et que $R_n$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ . *(1 point)*

## Exercice 2 : Critère de Cauchy et convergence absolue (3 points)

a. Pour $n \geq 1$ , on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ . Montrez que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ et déduisez-en, par le critère de Cauchy, que la série harmonique diverge. *(1 point)*

b. Démontrez, à l'aide du critère de Cauchy, qu'une série réelle absolument convergente est convergente. *(1 point)*

c. Étudiez la convergence absolue et la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ . *(1 point)*

## Exercice 3 : Séries de Bertrand et développement asymptotique (5 points)

a. Soit $\beta > 0$. Par comparaison à une intégrale, déterminez selon $\beta$ la nature de la série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ . *(1,5 point)*

b. Montrez que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ est semi-convergente. *(1 point)*

c. Soit $a > 0$ . Pour $n \geq 2$ , on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ . Justifiez que $u_n$ est bien défini, puis montrez que $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a} + v_n$ avec $v_n = -\frac{1}{n^a\left(n^a + (-1)^n\right)}$ . *(1 point)*

d. Déduisez-en, selon $a$ , la nature de $\sum u_n$ : absolument convergente, semi-convergente ou divergente. *(1,5 point)*

## Exercice 4 : Un produit de Cauchy divergent (3 points)

Pour $n \geq 0$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}$ (produit de Cauchy de $\sum a_n$ par elle-même).

a. Montrez que $\sum a_n$ converge. Est-elle absolument convergente ? *(0,5 point)*

b. Montrez que $c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$, puis que $|c_n| \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$. *(1,5 point)*

c. Concluez sur la nature de $\sum c_n$. Quelle hypothèse du théorème sur le produit de Cauchy fait défaut ici ? *(1 point)*

## Exercice 5 : Problème, transformation d'Abel pour la série de sin(n)/n (5 points)

Pour $n \geq 1$, on note $T_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k$ et on pose $T_0 = 0$.

a. En écrivant $T_n$ comme la partie imaginaire d'une somme géométrique, montrez que $|T_n| \leq \frac{1}{\sin(1/2)}$ pour tout $n$. *(1,5 point)*

b. Transformation d'Abel : en écrivant $\sin k = T_k - T_{k-1}$, montrez que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k} = \frac{T_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} T_k \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

*(1,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

c. Déduisez-en que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$ converge. *(1 point)*

d. En utilisant $|\sin n| \geq \sin^2 n = \frac{1 - \cos(2n)}{2}$ et en admettant que $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n)}{n}$ converge (même méthode), montrez que $\sum \frac{\sin n}{n}$ n'est pas absolument convergente. *(1 point)*

## Réviser avant le contrôle : séries alternées et semi-convergence

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Séries à termes quelconques » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** séries à termes quelconques.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L2** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.