Contrôle de maths L2 : produit scalaire et espaces euclidiens

Fiche du contrôle

- **Niveau :** licence L2
- **Chapitre :** Produit scalaire et espaces euclidiens
- **Durée conseillée :** 2 h
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 6 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 6 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité
  - Calculer : orthonormaliser une famille de polynômes par le procédé de Gram-Schmidt
  - Calculer : déterminer une projection orthogonale et la distance d'un vecteur à un sous-espace
  - Modéliser : traduire un ajustement affine en problème de moindres carrés

Exercice 1 : Question de cours : inégalité de Cauchy-Schwarz (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$.

a. Énoncez et démontrez l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tous $x, y \in E$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$. *(2,5 points)*

b. Démontrez qu'il y a égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée. *(1,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 2 : Gram-Schmidt sur des polynômes (6 points)

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 3 et, pour $P, Q \in E$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)\, Q(t)\, dt.$$

a. Démontrez que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E. *(1,5 point)*

b. Appliquez le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(1, X, X^2)$. Vous obtiendrez une base orthonormée (e_0, e_1, e_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ et vous vérifierez que $e_2 = \sqrt{5}\left(6X^2 - 6X + 1\right)$. *(2,5 points)*

c. Déterminez le projeté orthogonal p de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$, puis la valeur de

$$m = \min_{(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 \left(t^3 - a\, t^2 - b\, t - c\right)^2 dt.$$

(2 points)

Exercice 3 : Projection orthogonale dans R4 (4 points)

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique et l'on considère le sous-espace

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

a. Déterminez la dimension de F et une base orthogonale de $F^\perp$. *(1 point)*

b. Écrivez la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur $F^\perp$, puis celle de la

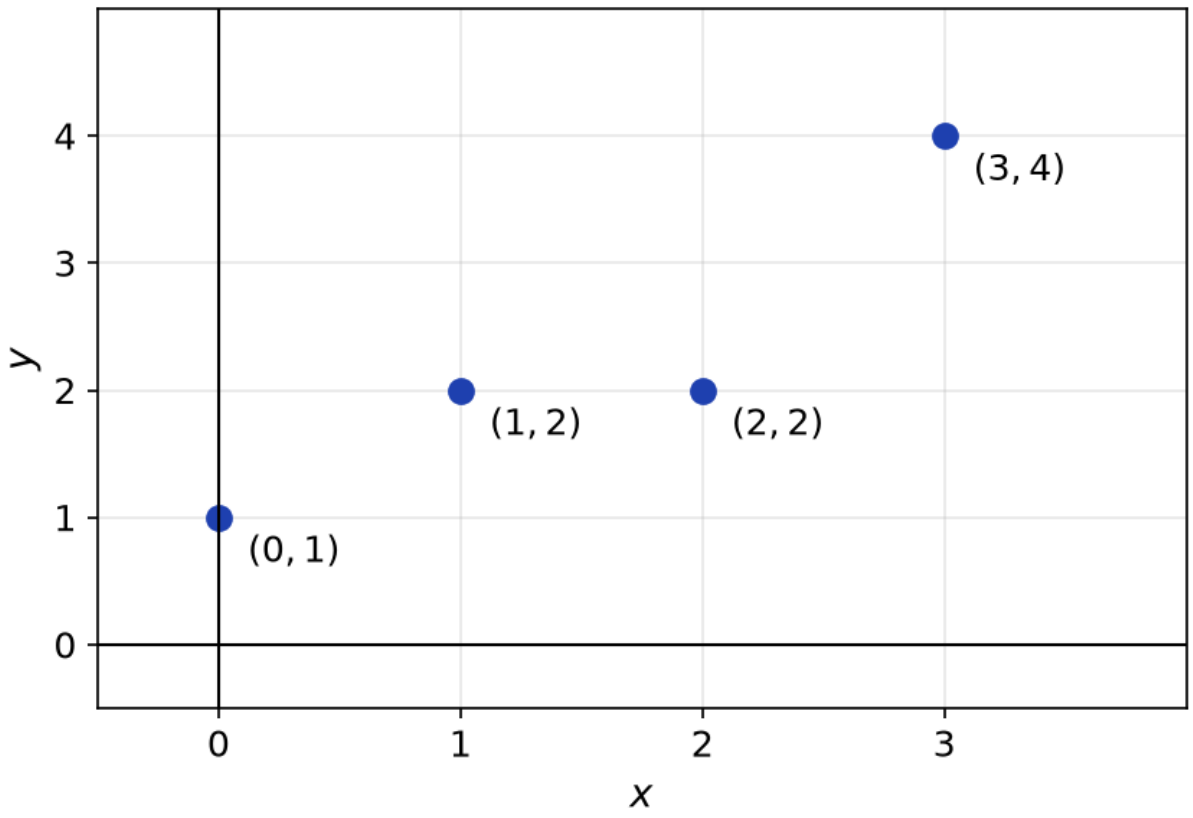
projection orthogonale sur F . *(1,5 point)*

c. Calculez la distance du vecteur $w = (1, 2, 3, 4)$ au sous-espace F . *(1,5 point)*

Exercice 4 : Problème : droite des moindres carrés (6 points)

Une expérience fournit les quatre mesures (x_i, y_i) suivantes.

x_i	0	1	2	3
y_i	1	2	2	4



On cherche les réels a et b qui minimisent $S(a, b) = \sum_{i=1}^{4} (y_i - a\, x_i - b)^2$. On note

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ [\text{ary?}]2 \\ 4_4 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, de sorte que $S(a,b) = |Y - AU|^2$ pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^4$.

a. Démontrez que S admet un minimum, atteint en un unique U , caractérisé par les équations normales $A^T A U = A^T Y$. Vous utiliserez la projection orthogonale sur l'image de A . *(2 points)*

b. Calculez $A^T A$ et $A^T Y$, puis les valeurs de a et b . *(2 points)*

c. Calculez la valeur minimale de S et interprétez-la comme une distance. *(1 point)*

d. Vérifiez par le calcul que le vecteur des résidus $Y - AU$ est orthogonal aux deux colonnes de A . *(1 point)*

Réviser avant le contrôle : produit scalaire et espaces euclidiens

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Espaces euclidiens » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** espaces euclidiens.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L2** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.