

Contrôle de maths L2 : polynômes d'endomorphismes et trigonalisation

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Polynômes d'endomorphismes et trigonalisation
- **Durée conseillée** : 2 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer le lemme des noyaux à l'aide de la relation de Bézout
 - Calculer : exploiter un polynôme annulateur pour obtenir un inverse ou une puissance
 - Chercher : déterminer un polynôme minimal et les sous-espaces caractéristiques
 - Modéliser : résoudre un système différentiel linéaire par trigonalisation

Exercice 1 : Question de cours : le lemme des noyaux (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .

- Rappelez la définition d'un polynôme annulateur de u , puis celle du polynôme minimal μ_u . Justifiez l'existence de μ_u . (1 point)
- Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Montrez que $\ker P(u)$ est stable par u et que $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$. (1 point)

- c. On suppose P et Q premiers entre eux. Énoncez puis démontrez le lemme des noyaux :
 $\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$. (2 points)

Exercice 2 : Un polynôme annulateur de degré 2 (4 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Calculez A^2 et vérifiez que $A^2 = A + 2I_3$. (0,5 point)
- Déduisez-en que A est inversible et exprimez A^{-1} en fonction de A et de I_3 . (1 point)
- Déterminez le polynôme minimal de A . La matrice A est-elle diagonalisable ? (1 point)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$, exprimez A^n comme combinaison linéaire de A et de I_3 . (1,5 point)

Exercice 3 : Endomorphismes nilpotents (4 points)

Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $N^p = 0$.

- Soit N nilpotente. Montrez que 0 est sa seule valeur propre complexe, puis que $N^n = 0$. (1,5 point)
- Montrez qu'une matrice nilpotente et diagonalisable est nulle. (1 point)
- Soit N nilpotente avec $N^3 = 0$. Montrez que $I_n + N$ est inversible et que $(I_n + N)^{-1} = I_n - N + N^2$. (0,5 point)
- Application : calculez l'inverse de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sans pivot de Gauss. (1 point)

Exercice 4 : Trigonalisation et système différentiel (8 points)

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \\ 2 & 1 & 0,0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Montrez que le polynôme caractéristique de B est $\chi_B = (X - 1)(X - 2)^2$. (1 point)
- Déterminez les sous-espaces propres $E_1(B)$ et $E_2(B)$. (1 point)
- Déterminez le polynôme minimal de B . La matrice B est-elle diagonalisable ? (1 point)
- À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, montrez que B est inversible et exprimez B^{-1} comme polynôme en B . Calculez B^{-1} . (1,5 point)
- On pose $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$. Trouvez un vecteur v_2 tel que $(B - 2I_3)v_2 = v_1$. Montrez que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donnez une matrice inversible P telle que $P^{-1}BP = T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Précisez les sous-espaces caractéristiques de B . (1,5 point)
- Résolvez le système différentiel $X'(t) = BX(t)$, d'inconnue $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dérivable, avec la condition initiale $X(0) = (1, 0, 0)$. On posera $Y = P^{-1}X$. (2 points)



Réviser avant le contrôle : polynômes d'endomorphismes et trigonalisation

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Trigonalisation et Cayley-Hamilton](#) » en L2 puis entraînez-vous

avec les **exercices corrigés** [trigonalisation et cayley-hamilton](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).