

Contrôle de maths L2 : partiel de S4, séries entières et de Fourier

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitres** : Séries entières + Intégrales dépendant d'un paramètre + Séries de Fourier
- **Durée conseillée** : 4 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : déterminer un rayon de convergence, la somme d'une série entière et un développement en série entière
 - Raisonner : vérifier les hypothèses de domination avant de dériver sous le signe intégrale
 - Chercher : obtenir une même fonction par équation différentielle, par série entière et par série de Fourier
 - Communiquer : énoncer avec précision les théorèmes de dérivation sous l'intégrale, de Dirichlet et de Parseval

Exercice 1 : Question de cours : dérivation sous l'intégrale, Dirichlet et Parseval (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

- a. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$. Énoncez le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour $F(x) = \int_J f(x, t) dt$, en précisant toutes les hypothèses, dont l'hypothèse de domination. (1,5 point)

b. Soit g une fonction 2π -périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, de coefficients de Fourier

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos(n\theta) d\theta \text{ et } b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \sin(n\theta) d\theta . \text{ Énoncez le théorème de Dirichlet et la formule de Parseval pour } g . (1,5 \text{ point})$$

Exercice 2 : Une série entière et sa somme (4 points)

On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$ et l'on note $S(x)$ sa somme là où elle converge.

a. Déterminez son rayon de convergence R . (0,5 point)

b. En décomposant $\frac{1}{n(n+1)}$ en éléments simples, montrez que, pour $x \in]-1, 1[$ non nul, $S(x) = 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}$. (1,5 point)

c. Montrez que la série converge normalement sur $[-1, 1]$. Déduisez-en la valeur de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} . (1 \text{ point})$$

d. Développez en série entière la fonction $x \rightarrow \ln(1+x-2x^2)$ au voisinage de 0 , en précisant le rayon de convergence. (1 point)

Exercice 3 : Intégrale de Gauss à paramètre et série entière (5 points)

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Pour x réel, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$.

a. Montrez que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et exprimez $F'(x)$ sous forme d'intégrale. (1,5 point)

b. À l'aide d'une intégration par parties, montrez que $F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$. Déduisez-en une expression explicite de F . (1,5 point)

c. Seconde méthode. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$. Montrez que

$$I_n = \frac{2n-1}{2} I_{n-1} \text{ pour } n \geq 1, \text{ puis que } I_n = \frac{(2n)!}{4^n n!} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ensuite, en développant $\cos(xt)$ en série entière et en admettant le théorème d'intégration terme à terme (si les u_n sont continues et intégrables sur J , si $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction continue et si $\sum \int_J |u_n|$ converge, alors $\int_J \sum u_n = \sum \int_J u_n$), retrouvez l'expression de F . (2 points)

Exercice 4 : Problème : noyau de Poisson et intégrale de Poisson (8 points)

Dans tout le problème, r est un réel de $] -1, 1[$. On pose, pour θ réel,

$$D_r(\theta) = 1 - 2r \cos \theta + r^2 \text{ et } f_r(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta).$$

Partie A : une série de Fourier

a. Montrez que la série définissant f_r converge normalement sur $\mathbb{R}$. Déduisez-en que f_r est continue, 2π -périodique et paire. (0,5 point)

b. En écrivant $r^n \cos(n\theta)$ comme la partie réelle de $(re^{i\theta})^n$, montrez que $D_r(\theta) > 0$ et que $f_r(\theta) = \frac{1 - r \cos \theta}{D_r(\theta)}$. (1 point)

c. Déterminez les coefficients de Fourier $a_n(f_r)$ et $b_n(f_r)$, en justifiant l'intégration terme à terme. (1 point)

- d. Vérifiez que $\frac{1-r^2}{D_r(\theta)} = 2f_r(\theta) - 1$, puis calculez $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{D_r(\theta)}$. Ensuite, calculez $\int_{-\pi}^{\pi} f_r(\theta)^2 d\theta$ à l'aide de la formule de Parseval. (1,5 point)

Partie B : une intégrale à paramètre

On pose $P(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos\theta + r^2) d\theta$ pour $r \in]-1, 1[$.

- e. Montrez que $D_r(\theta) \geq (1 - |r|)^2$. Déduisez-en que P est bien définie et de classe C^1 sur $]-1, 1[$. (1,5 point)
- f. Pour $r \neq 0$, montrez que $\frac{r - \cos\theta}{D_r(\theta)} = \frac{1 - f_r(\theta)}{r}$. Déduisez-en $P'(r)$, puis la valeur de $P(r)$ pour tout $r \in]-1, 1[$. (1,5 point)
- g. Seconde méthode. Pour θ fixé, montrez que $\ln D_r(\theta) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(n\theta)}{n}$, puis retrouvez la valeur de $P(r)$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : partiel de S4, séries entières et de Fourier

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Séries entières](#) » en L2 et « [Intégrales à paramètre](#) » en L2 et « [Séries de Fourier](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries entières](#), [intégrales à paramètre](#), [séries de fourier](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : séries entières et rayon de convergence](#)
- [Contrôle de maths L2 : intégrales dépendant d'un paramètre](#)
- [Contrôle de maths L2 : séries de Fourier et égalité de Parseval](#)