

Contrôle de maths L2 : partiel de S3, fonctions de deux variables

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitres** : Normes et topologie de $\mathbb{R}^n$ + Plusieurs variables : limites et dérivées partielles + Différentiabilité, formule de Taylor et extrema
- **Durée conseillée** : 3 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3,5 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3,5 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer qu'une partie est ouverte, fermée ou compacte et utiliser le théorème des bornes atteintes
 - Calculer : étudier limites, dérivées directionnelles et différentiabilité d'une fonction de deux variables
 - Chercher : déterminer et classer les points critiques à l'aide de la matrice hessienne
 - Modéliser : rechercher les extrema sur un domaine fermé en étudiant séparément l'intérieur et le bord paramétré

Exercice 1 : Question de cours : compacité et bornes atteintes (3,5 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle le théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée de $\mathbb{R}^n$ admet une sous-suite convergente.

- a. Soit K une partie fermée et bornée non vide de $\mathbb{R}^n$, et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Démontrez que f est bornée sur K et atteint ses bornes. (2 points)

- b. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, on pose $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $U = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Démontrez que D est compact, puis que U est ouvert. (1,5 point)

Exercice 2 : Normes, limites et continuité (4 points)

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x,y) = \max(|x|, |x+y|)$ et $|(x,y)|_\infty = \max(|x|, |y|)$.

- a. Démontrez que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. (1,5 point)
- b. Démontrez que $N \leq 2\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_\infty \leq 2N$. Que peut-on en déduire ? (1 point)
- c. Soit $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. Démontrez que f n'a pas de limite en $(0,0)$. (1 point)
- d. Soit $g(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $g(0,0) = 0$. Démontrez que g est continue en $(0,0)$. (0,5 point)

Exercice 3 : Dérivées directionnelles et différentiabilité (4 points)

On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

- a. Démontrez que $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, puis que f est de classe C^1 sur Ω . (1 point)
- b. Démontrez que f est continue en $(0,0)$. (0,5 point)

- c. Soit $v = (a,b) \neq (0,0)$. Démontrez que f admet en $(0,0)$ une dérivée selon le vecteur v , et calculez-la. (1 point)
- d. Démontrez que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. (1,5 point)

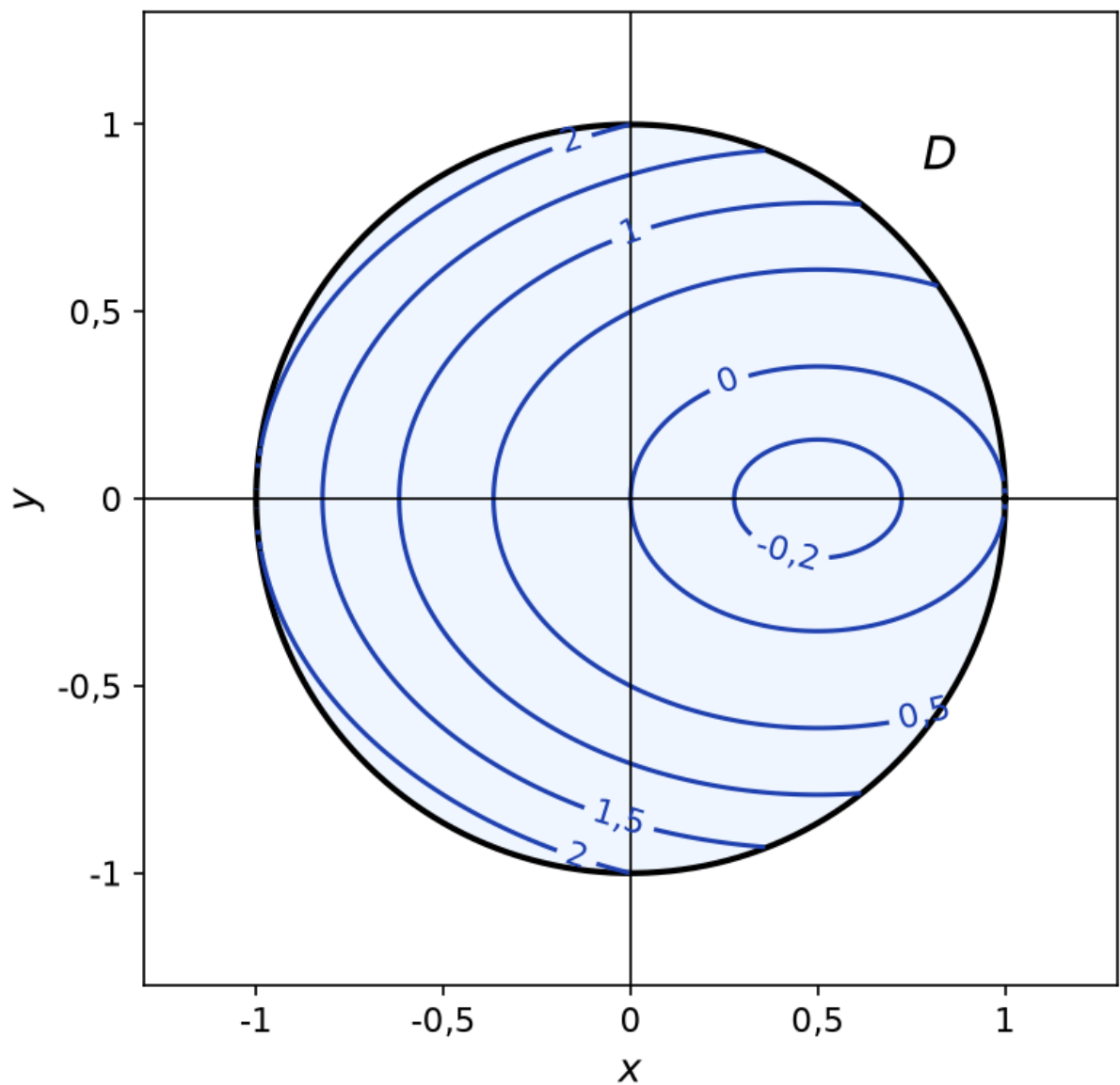
Exercice 4 : Points critiques et minimum global par compacité (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

- a. Déterminez les points critiques de f . (1 point)
- b. Précisez la nature de chacun d'eux à l'aide de la matrice hessienne. (1 point)
- c. On note $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Démontrez que $f(x,y) \geq \frac{\rho^4}{2} - 2\rho^2$. Déduisez-en, à l'aide du disque fermé de centre O et de rayon 2 , que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, et donnez sa valeur. (1,5 point)

Exercice 5 : Problème : extrema sur le disque unité fermé (5 points)

On reprend le disque fermé D de l'exercice 1 et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. La figure représente D et quelques lignes de niveau de f .



- Justifiez que l'intérieur de D est le disque ouvert U et que la frontière de D est le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 1$. (1 point)
- Justifiez que f admet un minimum et un maximum sur D . (0,5 point)
- Déterminez les points critiques de f dans U et leur nature. (1 point)
- En paramétrant le cercle par $\theta \rightarrow (\cos\theta, \sin\theta)$, étudiez les extrema de f sur C . (1,5 point)
- Déduisez-en le minimum et le maximum de f sur D , ainsi que les points où ils sont atteints. Vérifiez la cohérence avec la figure. (1 point)



Réviser avant le contrôle : partiel de S3, fonctions de deux variables

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Topologie de \$\mathbb{R}^n\$](#) » en L2 et « [Fonctions de plusieurs variables](#) » en L2 et « [Différentielle et extrema](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [topologie de \$\mathbb{R}^n\$](#) , [fonctions de plusieurs variables](#), [différentielle et extrema](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : normes et topologie de \$\mathbb{R}^n\$](#)
- [Contrôle de maths L2 : limites et dérivées partielles](#)
- [Contrôle de maths L2 : différentiabilité, Taylor et extrema](#)