

Contrôle de maths L2 : normes et topologie de $\mathbb{R}^n$

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Normes et topologie de $\mathbb{R}^n$
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : vérifier les axiomes d'une norme et comparer deux normes
 - Représenter : dessiner les boules unités de normes du plan
 - Chercher : montrer qu'une partie est ouverte, fermée ou compacte et déterminer une adhérence
 - Calculer : trouver les bornes atteintes d'une fonction continue sur un compact

Exercice 1 : Question de cours : normes usuelles de $\mathbb{R}^n$ (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ et $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

- Rappelez la définition d'une norme sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. (0,5 point)
- Démontrez que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$. (1 point)

- c. Démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$. Que peut-on en conclure ? (1,5 point)
- d. Dessinez sur une même figure les boules unités fermées de $\mathbb{R}^2$ pour ces trois normes, et interprétez les inégalités de la question c. (1 point)

Exercice 2 : Une norme non usuelle du plan (4 points)

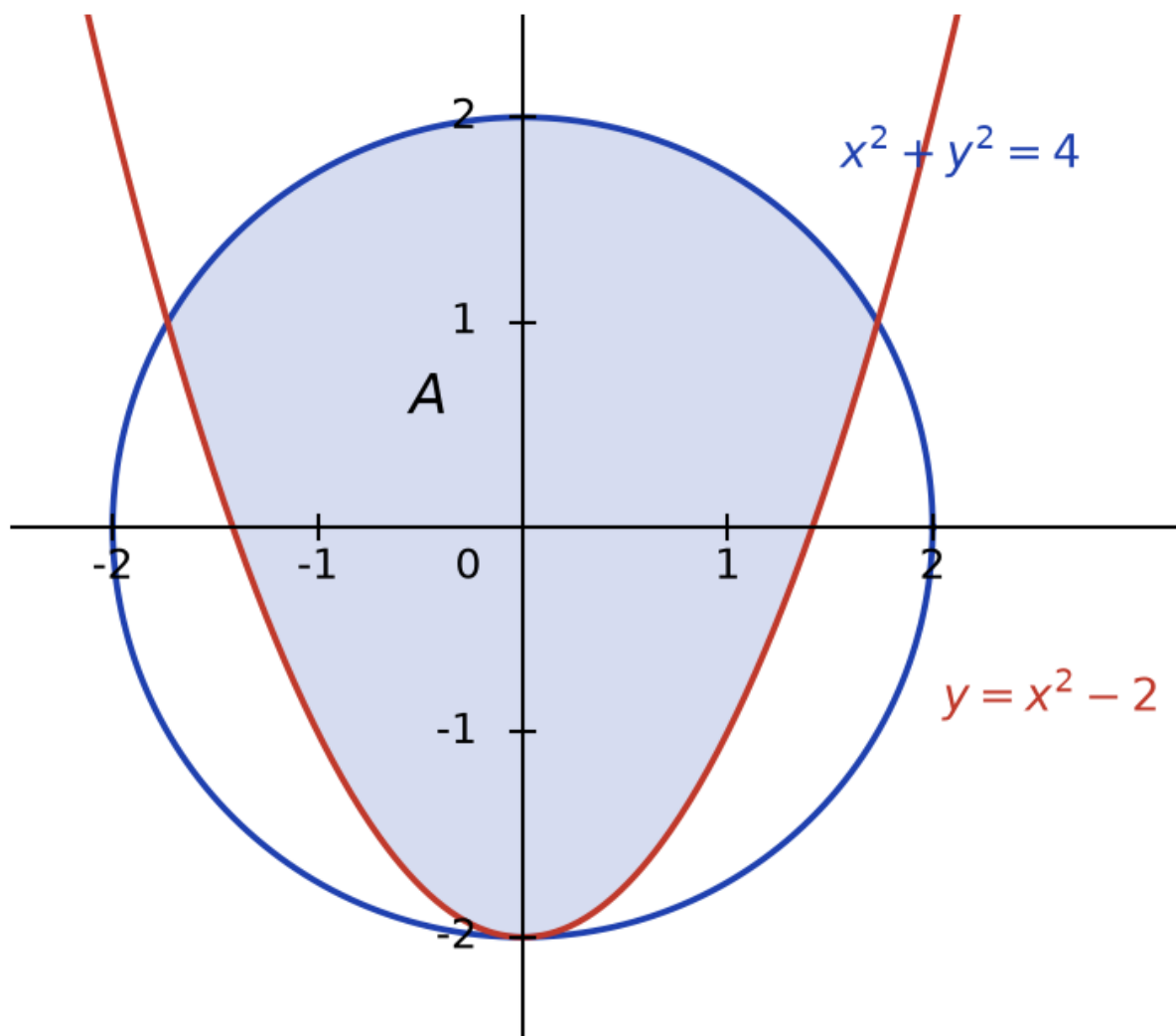
Pour $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(u) = \max(|x|, |x + y|)$.

- a. Montrez que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. (1,5 point)
- b. Montrez que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, $\frac{1}{2}\|u\|_\infty \leq N(u) \leq 2\|u\|_\infty$, et que les constantes $\frac{1}{2}$ et 2 ne peuvent pas être améliorées. (1,5 point)
- c. Dessinez la boule unité fermée de N en précisant ses sommets. (1 point)

Exercice 3 : Une partie compacte définie par des inégalités (5 points)

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne et on considère

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } y \geq x^2 - 2\}$, représentée ci-dessous.



- Montrez que A est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$, à l'aide d'images réciproques. (1,5 point)
- Montrez que A est bornée, puis qu'elle est compacte. (1 point)
- Justifiez que $f : (x, y) \rightarrow x + y$ est bornée sur A et atteint ses bornes. Déterminez son maximum et son minimum sur A , ainsi que des points où ils sont atteints. (1,5 point)
- Montrez que $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 4 \text{ et } y > x^2 - 2\}$ est un ouvert contenu dans l'intérieur de A . (1 point)

Exercice 4 : Adhérence d'une partie dénombrable (3 points)

On considère $D = \left\{ \left(\frac{1}{n}, (-1)^n \right), n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{R}^2$.

- Montrez que D est bornée mais n'est pas fermée. (1 point)
- Déterminez l'intérieur de D . (0,5 point)
- Montrez que l'adhérence de D est $\overline{D} = D \cup \{(0, 1), (0, -1)\}$. (1,5 point)

Exercice 5 : Problème : distance à un fermé (4 points)

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. Soit F une partie fermée non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour $a \in \mathbb{R}^n$, on pose $d(a, F) = \inf_{b \in F} \|a - b\|_2$.

- Montrez que $|d(a, F) - d(a', F)| \leq \|a - a'\|_2$ pour tous $a, a' \in \mathbb{R}^n$. Qu'en déduisez-vous pour l'application $a \rightarrow d(a, F)$? (1 point)
- Montrez qu'il existe $b_0 \in F$ tel que $\|a - b_0\|_2 = d(a, F)$. On pourra introduire $K = F \cap \overline{B}(a, r)$ pour un rayon r bien choisi. (1,5 point)
- Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $H = \{(x, y), xy = 1\}$. Montrez que H est fermée, puis calculez $d(0, H)$ et déterminez tous les points de H où cette distance est atteinte. (1 point)
- Soit $L = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$. Montrez que L et H sont deux fermés disjoints, mais que $\inf_{u \in L, v \in H} \|u - v\|_2 = 0$. (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : normes et topologie de $\mathbb{R}^n$

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Topologie de \$\mathbb{R}^n\$](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [topologie de \$\mathbb{R}^n\$](#) .

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : partiel de S3, fonctions de deux variables](#)