Contrôle de maths L2 : limites et dérivées partielles

Fiche du contrôle

- **Niveau :** licence L2
- **Chapitre :** Plusieurs variables : limites et dérivées partielles
- **Durée conseillée :** 2 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Chercher : étudier une limite en (0,0) par majoration, coordonnées polaires ou restriction à des courbes
  - Calculer : dériver partiellement, former un gradient et une dérivée directionnelle
  - Raisonner : montrer qu'une fonction est de classe C1 et appliquer la règle de la chaîne
  - Communiquer : exploiter des lignes de niveau et justifier un contre-exemple

Exercice 1 : Question de cours : dérivées partielles et continuité (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in U$.

a. Définissez les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, le gradient $\nabla f(a)$, puis la notion de fonction de classe C^1 sur U. *(1 point)*

b. Énoncez le théorème de Schwarz sur les dérivées partielles secondes croisées. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

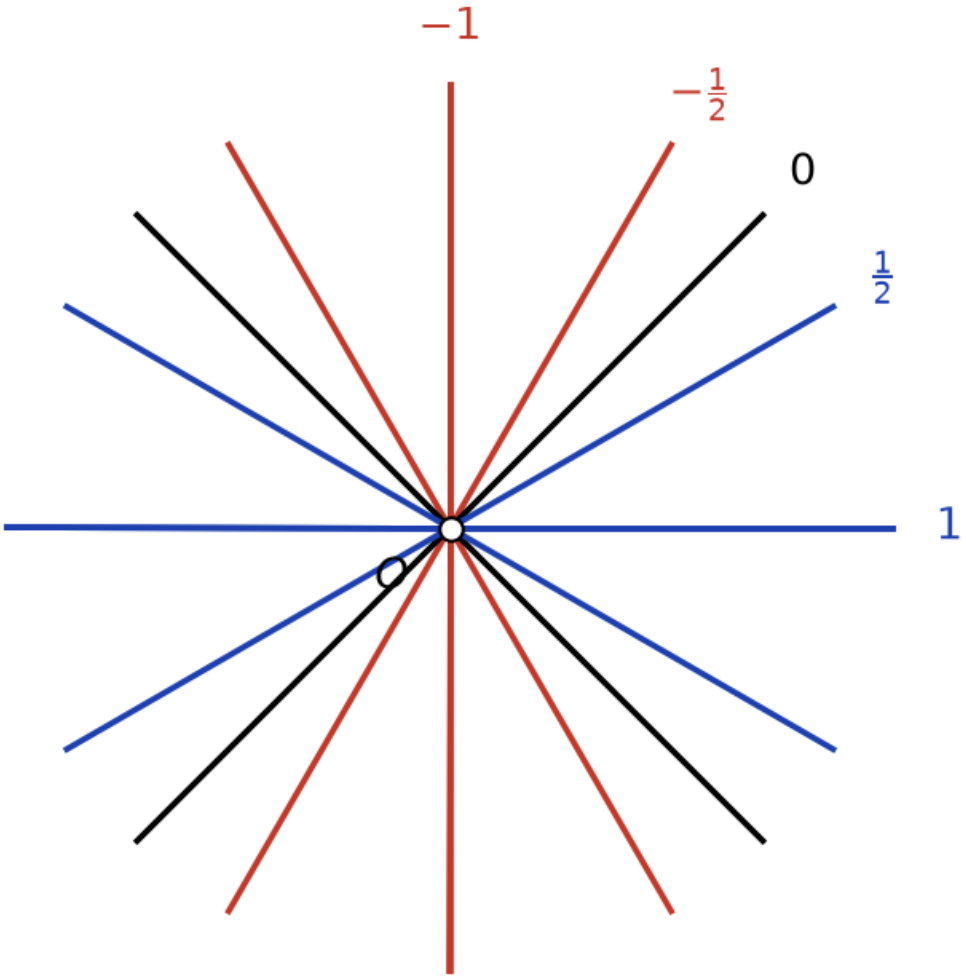
c. On pose $\varphi(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $\varphi(0,0) = 0$. Montrez que φ admet des dérivées partielles en $(0,0)$, mais qu'elle n'est pas continue en $(0,0)$. *(1 point)*

Exercice 2 : Quatre limites en (0,0) (5 points)

Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dites si elle admet une limite en $(0,0)$ et, le cas échéant, déterminez-la.

a. $f_1(x,y) = \frac{x^2\, y}{x^2+y^2}$. *(1 point)*

b. $f_2(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Quelques lignes de niveau de f_2 sont représentées ci-dessous, avec la valeur de f_2 sur chacune. Décrivez les lignes de niveau de f_2, puis concluez. *(1,5 point)*



c. $f_3(x,y) = \dfrac{x^2\,y}{x^4+y^2}$. Étudiez d'abord la restriction de f_3 aux droites passant par l'origine, puis à la parabole d'équation $y = x^2$. *(1,5 point)*

d. $f_4(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, à l'aide des coordonnées polaires. *(1 point)*

Exercice 3 : Gradient et règle de la chaîne (4 points)

On considère $h(x,y) = x\,e^{xy} + \ln(1+y^2)$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

a. Calculez les dérivées partielles de h et justifiez que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. *(1 point)*

b. Calculez $\nabla h(1,0)$, puis la dérivée de h au point $(1,0)$ selon le vecteur unitaire $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. *(1 point)*

Soit maintenant $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g(r,\theta) = F(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$.

c. À l'aide de la règle de la chaîne, exprimez $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction des dérivées partielles de F . *(1 point)*

d. Montrez que $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = x\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ avec $(x,y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$. Déduisez-en que si $x\frac{\partial F}{\partial y} = y\frac{\partial F}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$, alors F est constante sur chaque cercle de centre O . *(1 point)*

Exercice 4 : Problème : un contre-exemple au théorème de Schwarz (8 points)

On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

a. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. *(1 point)*

b. Montrez que, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$. En remarquant que $f(y,x) = -f(x,y)$, déduisez-en $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. *(1,5 point)*

c. Calculez $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. *(1 point)*

d. Montrez que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 2|y|$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, puis que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. *(1,5 point)*

e. Calculez $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pour tout réel y et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pour tout réel x. Déduisez-en les dérivées croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. *(2 points)*

f. Que peut-on en conclure sur la régularité de f ? Justifiez à l'aide du théorème de Schwarz. *(1 point)*

Réviser avant le contrôle : limites et dérivées partielles

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Fonctions de plusieurs variables » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** fonctions de plusieurs variables.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L2** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- Contrôle de maths L2 : partiel de S3, fonctions de deux variables

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.