

Contrôle de maths L2 : limites et dérivées partielles

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Plusieurs variables : limites et dérivées partielles
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Chercher : étudier une limite en $(0,0)$ par majoration, coordonnées polaires ou restriction à des courbes
 - Calculer : dériver partiellement, former un gradient et une dérivée directionnelle
 - Raisonner : montrer qu'une fonction est de classe C^1 et appliquer la règle de la chaîne
 - Communiquer : exploiter des lignes de niveau et justifier un contre-exemple

Exercice 1 : Question de cours : dérivées partielles et continuité (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in U$.

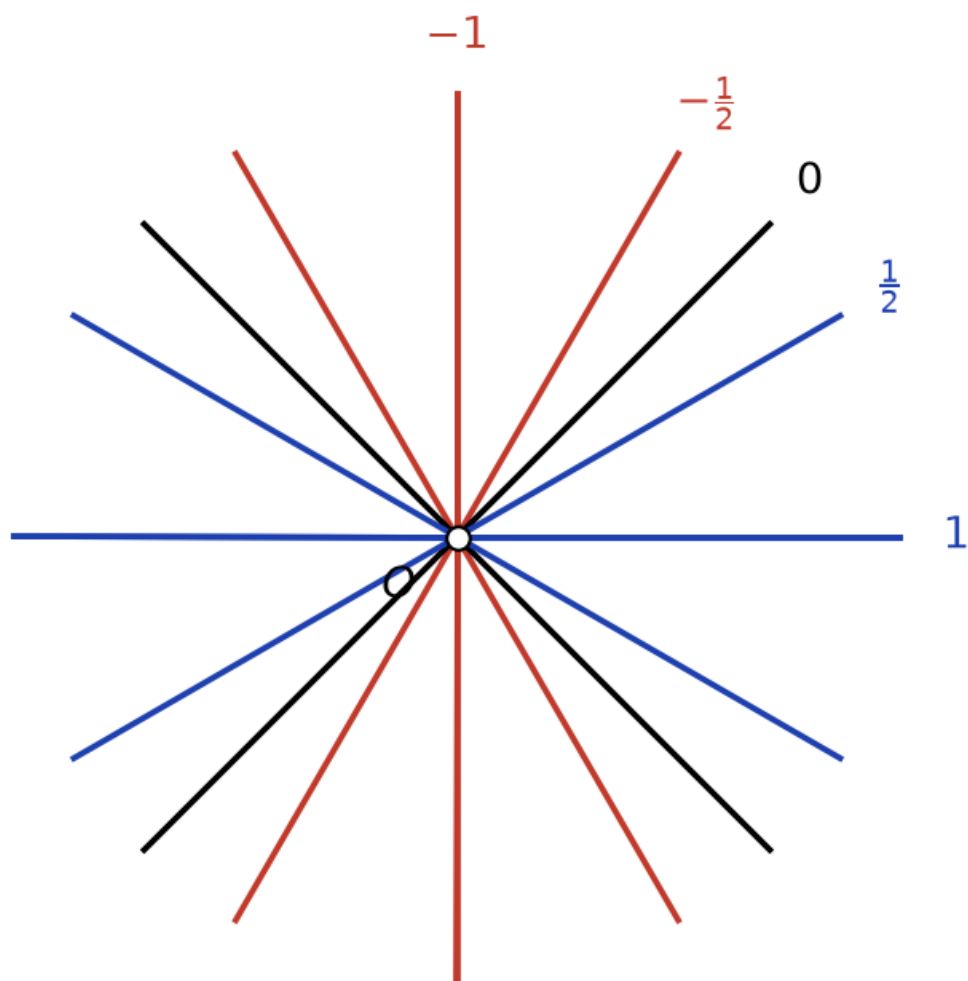
- Définissez les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, le gradient $\nabla f(a)$, puis la notion de fonction de classe C^1 sur U . (1 point)
- Énoncez le théorème de Schwarz sur les dérivées partielles secondes croisées. (1 point)

- c. On pose $\varphi(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $\varphi(0, 0) = 0$. Montrez que φ admet des dérivées partielles en $(0, 0)$, mais qu'elle n'est pas continue en $(0, 0)$. (1 point)

Exercice 2 : Quatre limites en (0,0) (5 points)

Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dites si elle admet une limite en $(0, 0)$ et, le cas échéant, déterminez-la.

- a. $f_1(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$. (1 point)
- b. $f_2(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Quelques lignes de niveau de f_2 sont représentées ci-dessous, avec la valeur de f_2 sur chacune. Décrivez les lignes de niveau de f_2 , puis concluez. (1,5 point)



c. $f_3(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Étudiez d'abord la restriction de f_3 aux droites passant par l'origine, puis à la parabole d'équation $y = x^2$. (1,5 point)

d. $f_4(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$, à l'aide des coordonnées polaires. (1 point)

Exercice 3 : Gradient et règle de la chaîne (4 points)

On considère $h(x, y) = x e^{xy} + \ln(1 + y^2)$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

- a. Calculez les dérivées partielles de h et justifiez que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. (1 point)
- b. Calculez $\nabla h(1, 0)$, puis la dérivée de h au point $(1, 0)$ selon le vecteur unitaire $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. (1 point)

Soit maintenant $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g(r, \theta) = F(r \cos \theta, r \sin \theta)$ pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

- c. À l'aide de la règle de la chaîne, exprimez $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction des dérivées partielles de F . (1 point)
- d. Montrez que $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = x \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ avec $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.
Deduissez-en que si $x \frac{\partial F}{\partial y} = y \frac{\partial F}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$, alors F est constante sur chaque cercle de centre O . (1 point)

Exercice 4 : Problème : un contre-exemple au théorème de Schwarz (8 points)

On définit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

- a. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. (1 point)
- b. Montrez que, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$. En remarquant que $f(y, x) = -f(x, y)$, déduisez-en $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. (1,5 point)
- c. Calculez $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. (1 point)
- d. Montrez que $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq 2|y|$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, puis que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. (1,5 point)

- e. Calculez $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ pour tout réel y et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ pour tout réel x . Déduisez-en les dérivées croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$. (2 points)
- f. Que peut-on en conclure sur la régularité de f ? Justifiez à l'aide du théorème de Schwarz. (1 point)



Réviser avant le contrôle : limites et dérivées partielles

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Fonctions de plusieurs variables](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [fonctions de plusieurs variables](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : partiel de S3, fonctions de deux variables](#)