

Contrôle de maths L2 : isométries et théorème spectral

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Isométries, endomorphismes symétriques et théorème spectral
- **Durée conseillée** : 2 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer l'orthogonalité des sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique
 - Calculer : reconnaître une matrice orthogonale et déterminer l'axe et l'angle d'une rotation de l'espace
 - Représenter : écrire la matrice d'une réflexion à partir d'un vecteur normal
 - Calculer : diagonaliser une matrice symétrique réelle dans une base orthonormée et en exploiter la décomposition

Exercice 1 : Question de cours : endomorphismes symétriques et matrices orthogonales (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans cet exercice, E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, et $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique.

- Soit u un endomorphisme symétrique de E , et $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres de u .
Démontrez que les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux. (1,5 point)
- Énoncez le théorème spectral, pour un endomorphisme symétrique puis pour une matrice symétrique réelle. (1 point)
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrez que $M^T M = I_n$ si et seulement si les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, puis que $\det M \in \{-1, 1\}$ dans ce cas. (1,5 point)

Exercice 2 : Axe et angle d'une rotation (5 points)

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée canonique. On considère

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Démontrez que A est une matrice orthogonale. (1 point)
- Calculez $\det A$ et déduisez-en que A est la matrice d'une rotation r . (1 point)
- Déterminez l'axe de r . (1 point)
- On oriente l'axe par le vecteur $w = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Déterminez l'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$ de la rotation r . (2 points)

Exercice 3 : Matrice d'une réflexion (3 points)

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on note P le plan d'équation $x - 2y + 2z = 0$ et s la réflexion (symétrie orthogonale) par rapport à P .

- a. Démontrez que $s(x) = x - \frac{2 \langle x, n \rangle}{\|n\|^2} n$, où $n = (1, -2, 2)$, puis écrivez la matrice S de s dans la base canonique. (1,5 point)
- b. Vérifiez que S est symétrique et orthogonale, et donnez $\det S$ sans calcul de déterminant. (1 point)
- c. Calculez l'image du vecteur $(1, 1, 1)$ par s . (0,5 point)

Exercice 4 : Problème : théorème spectral pour une matrice 3×3 (8 points)

On considère la matrice symétrique réelle

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a. Justifiez, sans calcul, qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $B = P D P^T$. (0,5 point)
- b. Vérifiez que $(1, 1, -2)$ appartient au noyau de B , puis calculez le rang de $B - 6 I_3$. Déduisez-en le spectre de B et la dimension de chaque sous-espace propre. (2 points)
- c. Déterminez une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de B , puis des matrices P et D qui conviennent. (2 points)
- d. Démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\langle Bx, x \rangle \geq 0$, et déterminez les vecteurs x pour lesquels $\langle Bx, x \rangle = 0$. La matrice B est-elle définie positive ? (1,5 point)
- e. Déterminez une matrice R symétrique à valeurs propres positives telle que $R^2 = B$, et exprimez-la simplement en fonction de B . (1,5 point)
- f. Calculez B^k pour tout entier $k \geq 1$. (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : isométries et théorème spectral

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Isométries et théorème spectral](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [isométries et théorème spectral](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).