

Contrôle de maths L2 : intégrales généralisées et intégrabilité

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Intégrales généralisées
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 7 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer la nature des intégrales de Riemann
 - Chercher : comparer une fonction positive à une référence au voisinage d'une borne
 - Calculer : intégrer par parties ou changer de variable sur un intervalle ouvert
 - Communiquer : justifier chaque passage à la limite

Exercice 1 : Question de cours, les intégrales de Riemann (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 2 heures.

Soit α un réel.

- a. Démontrez que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et donnez alors sa valeur.
- (1,5 point)

- b. Démontrez que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, et donnez alors sa valeur.
(1,5 point)
- c. Énoncez le théorème de comparaison par équivalents pour les intégrales généralisées de fonctions positives sur $[a, b[$. (1 point)

Exercice 2 : Nature et calcul de quatre intégrales (5 points)

Pour chaque intégrale, précisez le ou les points où elle est impropre et justifiez sa nature.

- a. Montrez que $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$ converge, puis calculez-la à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$. (1,5 point)

- b. Montrez que $J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ converge, puis calculez-la par une intégration par parties sur $[1, x]$. (1,5 point)

- c. Déterminez la nature de $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$. (1 point)

- d. Déterminez la nature de $\int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^{5/2}} dt$. (1 point)

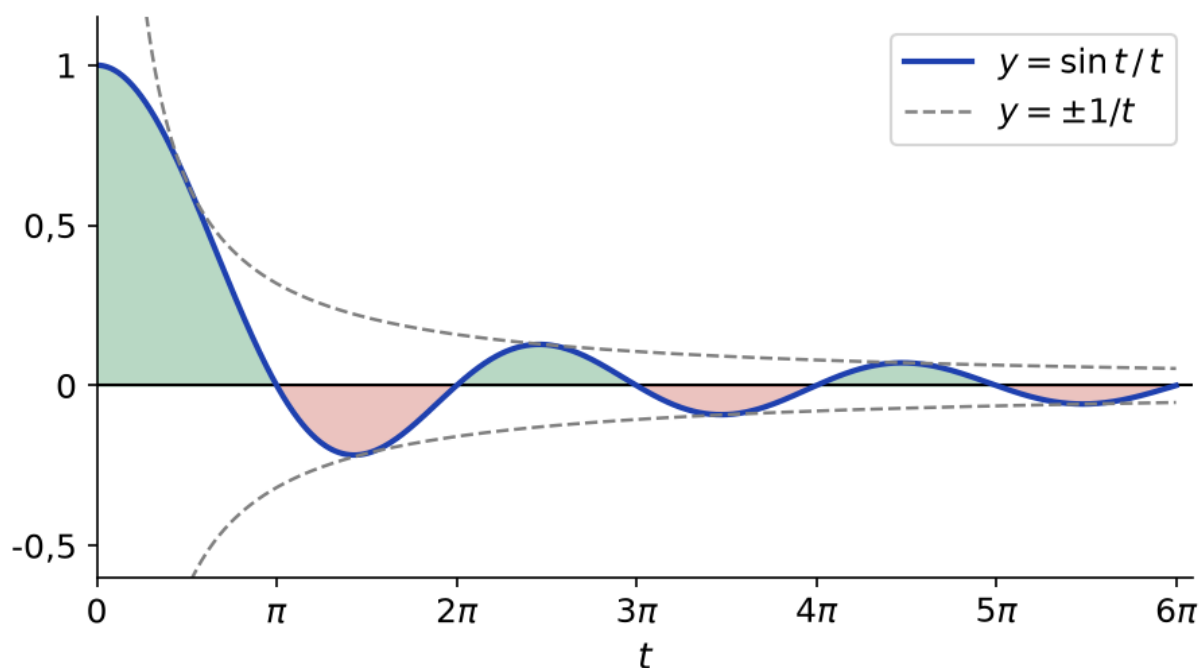
Exercice 3 : La fonction Gamma aux entiers (4 points)

Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- Montrez que cette intégrale converge pour tout $x > 0$. (1,5 point)
- Par une intégration par parties sur un segment $[\epsilon, A]$ avec $0 < \epsilon < A$, suivie d'un passage à la limite, montrez que $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. (1,5 point)
- Calculez $\Gamma(1)$ et déduisez-en que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier $n \geq 0$. (1 point)

Exercice 4 : Problème, l'intégrale semi-convergente de $\sin(t)/t$ (7 points)

La fonction $f : t \rightarrow \frac{\sin t}{t}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Sa courbe est représentée ci-dessous.



a. Montrez que f se prolonge par continuité en 0. Que dire alors de $\int_0^1 f(t) dt$? (1 point)

b. À l'aide d'une intégration par parties sur $[1, A]$, montrez que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge. Concluez

sur la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. (1,5 point)

c. Montrez que, pour tout entier $k \geq 0$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$. Déduisez-en que f n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$. (1,5 point)

d. Par une intégration par parties sur $[\varepsilon, A]$ justifiée par un passage à la limite, montrez que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt,$$

en vérifiant que la seconde intégrale est absolument convergente. (1,5 point)

e. À l'aide de la formule $1 - \cos t = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ et d'un changement de variable, déduisez-en que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du. \quad (1,5 \text{ point})$$



Réviser avant le contrôle : intégrales généralisées et intégrabilité

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Intégrales généralisées](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégrales généralisées](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : comparaison série-intégrale et restes](#)