

Contrôle de maths L2 : intégrales doubles, triples et curvilignes

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Intégrales multiples et intégrales curvilignes
- **Durée conseillée** : 2 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Représenter : dessiner un domaine d'intégration et le décrire comme domaine élémentaire dans les deux ordres
 - Calculer : appliquer le théorème de Fubini et les changements de variables polaires, cylindriques et sphériques
 - Raisonner : encadrer une intégrale sur le plan par des intégrales sur des disques et des carrés
 - Modéliser : calculer une aire par une intégrale curviligne grâce à la formule de Green-Riemann

Exercice 1 : Question de cours : Fubini et jacobiens (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

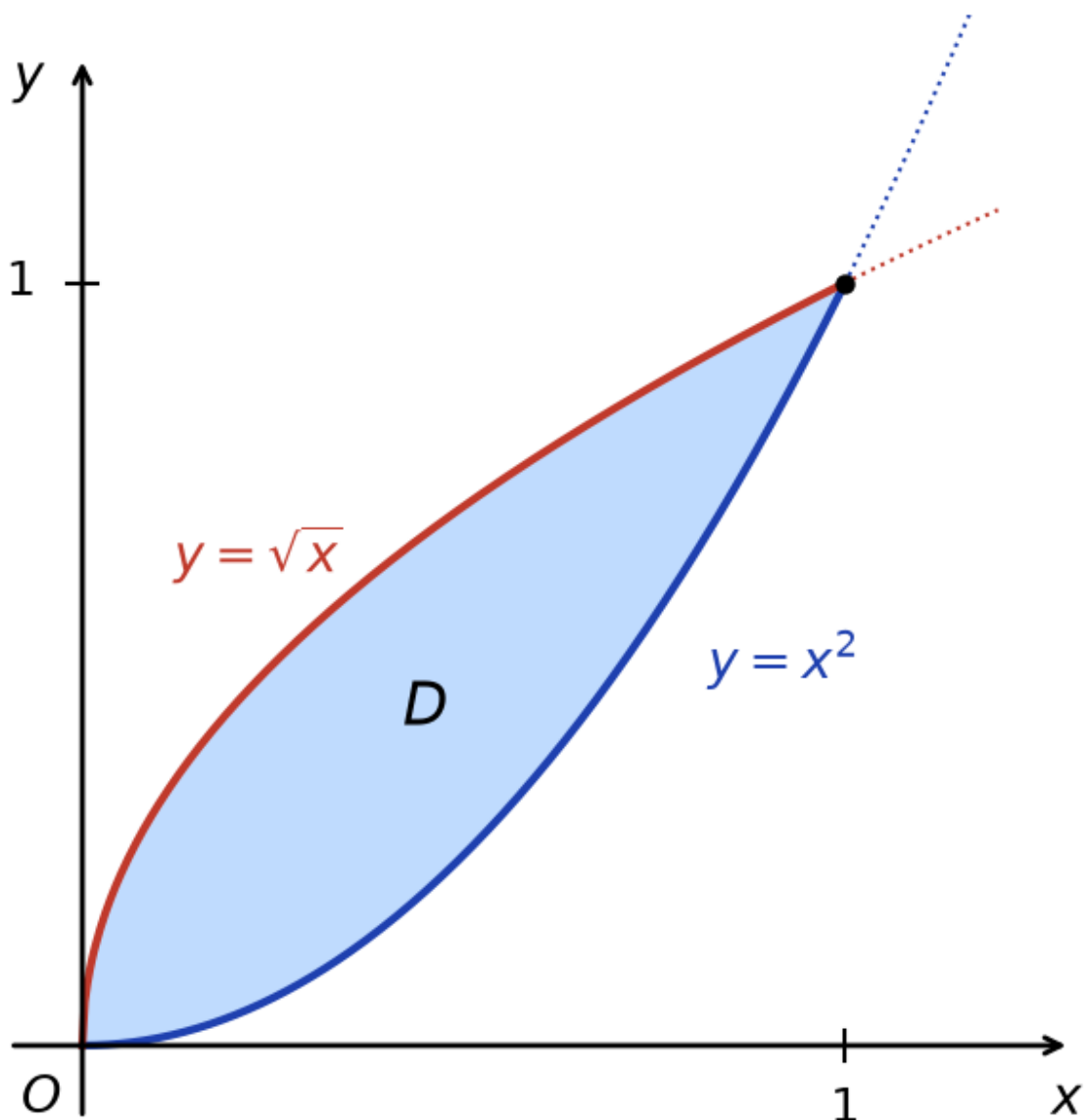
- a. Soit $a < b$ deux réels et $\varphi_1 \leq \varphi_2$ deux fonctions continues sur $[a, b]$. Énoncez le théorème de Fubini pour une fonction f continue sur le domaine élémentaire

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\}. \quad (1 \text{ point})$$

- b. Calculez le jacobien du passage en coordonnées polaires $(r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$. (0,5 point)
- c. Calculez le jacobien du passage en coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi) \rightarrow (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$, avec $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\varphi \in [0, \pi]$. (1,5 point)

Exercice 2 : Théorème de Fubini sur des domaines élémentaires (4 points)

On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$, représenté ci-dessous.



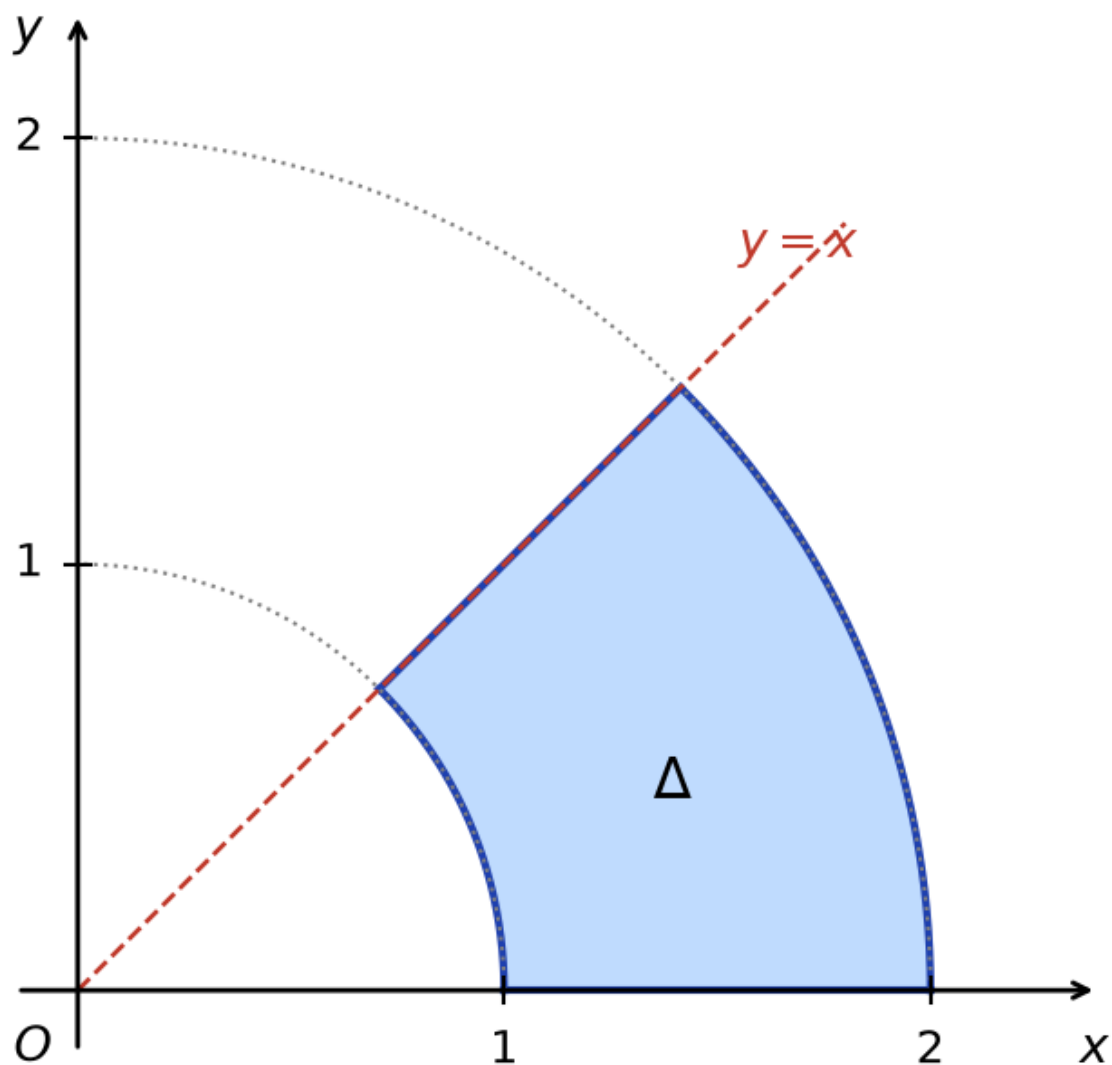
a. Calculez l'aire de D . (1 point)

b. Calculez $I = \iint_D xy \, dx \, dy$. (1,5 point)

c. On pose $J = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} \, dx \right) dy$. Dessinez le domaine d'intégration, échangez l'ordre des intégrations en justifiant, puis calculez J . (1,5 point)

Exercice 3 : Coordonnées polaires et intégrale de Gauss (4 points)

On note $\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \\ 0 \leq y \leq x \end{array} \right\}$.



a. Calculez $\iint_{\Delta} x \, dx \, dy$ en coordonnées polaires. (1,5 point)

b. Calculez $\iint_{\Delta} \frac{dx \, dy}{x^2 + y^2}$. (1 point)

c. Pour $R > 0$, on note D_R le disque fermé de centre O et de rayon R , et $C_R = [-R, R]^2$. Calculez $\iint_{D_R} e^{-(x^2 + y^2)} \, dx \, dy$. Ensuite, en comparant les intégrales sur D_R , C_R et $D_{R\sqrt{2}}$, démontrez que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$. (1,5 point)

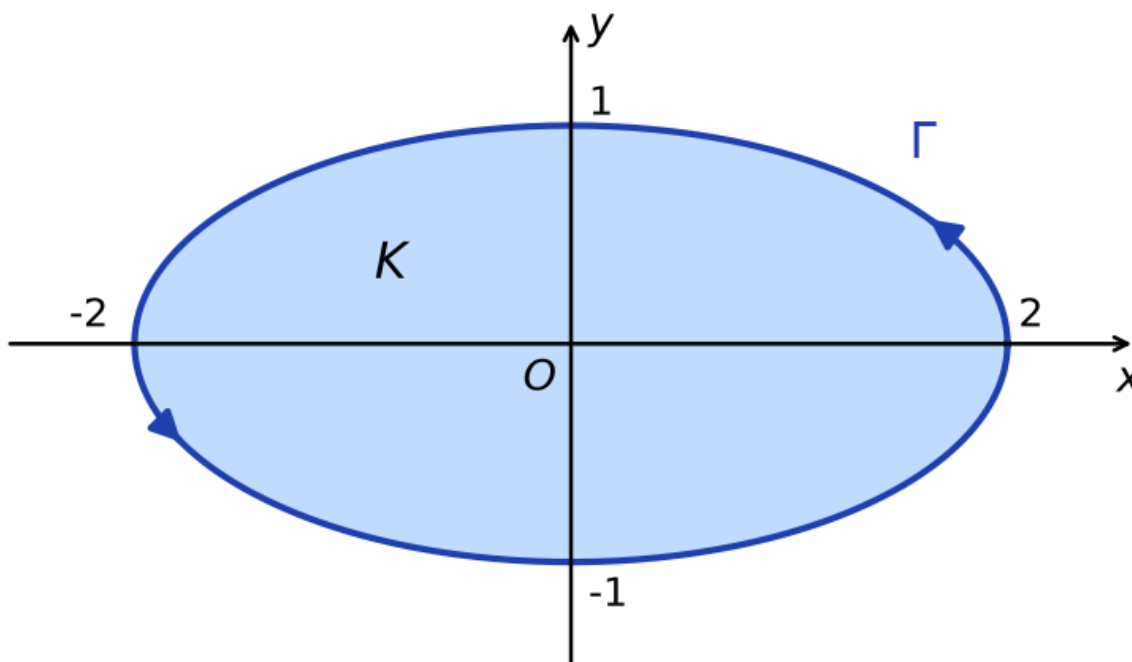
Exercice 4 : Volumes et intégrales triples (4 points)

a. Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$, solide compris entre deux parabolôides. Déterminez la projection de V sur le plan (xOy) , dessinez-la, puis calculez le volume de V en coordonnées cylindriques. (2 points)

b. Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^3$. Calculez $\iiint_B z^2 \, dx \, dy \, dz$ en coordonnées sphériques. Vérifiez votre résultat à l'aide de $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$ et d'un argument de symétrie. (2 points)

Exercice 5 : Problème : formes différentielles et formule de Green-Riemann (5 points)

Dans cet exercice, Γ désigne l'ellipse paramétrée par $t \rightarrow (2\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, parcourue dans le sens direct. Elle borde le domaine $K = \{(x, y) : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$.



- a. Montrez que la forme $\omega_1 = (2xy + 1) dx + (x^2 + 3y^2) dy$ est exacte sur $\mathbb{R}^2$, déterminez une primitive, puis calculez son intégrale le long de n'importe quel chemin de $(0, 0)$ à $(1, 2)$. (1 point)
- b. Calculez directement $\oint_{\Gamma} x dy - y dx$. Énoncez ensuite la formule de Green-Riemann et déduisez-en l'aire de K . (1,5 point)
- c. Calculez $\oint_{\Gamma} x^2 y dx + x y^2 dy$ à l'aide de la formule de Green-Riemann (on pourra poser $x = 2r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$). (1,5 point)
- d. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on considère $\omega_4 = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$. Montrez que ω_4 est fermée, calculez son intégrale sur le cercle unité parcouru dans le sens direct, et concluez sur son exactitude. (1 point)



Réviser avant le contrôle : intégrales doubles, triples et curvilignes

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Intégrales multiples » en L2](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégrales multiples](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).