Contrôle de maths L2 : intégrales dépendant d'un paramètre

Fiche du contrôle

- **Niveau :** licence L2
- **Chapitre :** Intégrales dépendant d'un paramètre
- **Durée conseillée :** 2 h 30
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : énoncer les théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe intégrale
  - Calculer : vérifier une hypothèse de domination sur chaque segment et dériver sous l'intégrale
  - Chercher : établir l'équation vérifiée par une intégrale à paramètre pour la calculer
  - Communiquer : rédiger l'étude de la fonction Gamma d'Euler avec toutes les hypothèses

Exercice 1 : Question de cours : continuité et dérivation sous l'intégrale (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans cet exercice, A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, et k une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs réelles.

a. Énoncez le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre $x \to \int_I k(x,t)\,dt$, avec une hypothèse de domination. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. Énoncez le théorème de dérivation sous le signe intégrale (classe $\mathcal{C}^1$), avec une hypothèse de domination sur tout segment de A. *(1 point)*

c. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$. Démontrez que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$, puis de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. *(1 point)*

Exercice 2 : Une intégrale calculée par dérivation (4 points)

Pour $x > -1$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,dt.$$

a. Démontrez que, pour tout $x > -1$, la fonction $t \to \frac{t^x - 1}{\ln t}$ est intégrable sur $]0, 1[$. *(1,5 point)*

b. Démontrez que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ et calculez $F'(x)$. Vous rédigerez l'hypothèse de domination sur un segment $[a, b]$ inclus dans $]-1, +\infty[$. *(1,5 point)*

c. En déduire $F(x)$ pour $x > -1$, puis la valeur de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$. *(1 point)*

Exercice 3 : La fonction Gamma d'Euler (5 points)

On pose, lorsque cela a un sens, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$.

a. Démontrez que $\Gamma(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$. *(1 point)*

b. Démontrez que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, puis calculez $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$. *(1 point)*

c. Démontrez que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et donnez $\Gamma''(x)$ sous forme d'intégrale. *(1,5 point)*

d. Démontrez que Γ est strictement convexe, puis qu'elle admet un minimum global sur $]0, +\infty[$, atteint en un unique point de $]1, 2[$. *(1,5 point)*

Exercice 4 : Problème : l'intégrale de Gauss (8 points)

On définit, pour tout réel x,

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

a. Démontrez que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimez $g'(x)$ sous forme d'intégrale. *(2 points)*

b. Démontrez que $f' + g' = 0$ sur $\mathbb{R}$, puis que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout réel x. *(2 points)*

c. Démontrez que $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. *(1,5 point)*

d. Justifiez la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et démontrez que cette intégrale vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. *(1,5 point)*

e. En déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, où Γ est la fonction de l'exercice 3. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Réviser avant le contrôle : intégrales dépendant d'un paramètre

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Intégrales à paramètre » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** intégrales à paramètre.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L2** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- Contrôle de maths L2 : partiel de S4, séries entières et de Fourier