

Contrôle de maths L2 : intégrales dépendant d'un paramètre

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Intégrales dépendant d'un paramètre
- **Durée conseillée** : 2 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : énoncer les théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe intégrale
 - Calculer : vérifier une hypothèse de domination sur chaque segment et dériver sous l'intégrale
 - Chercher : établir l'équation vérifiée par une intégrale à paramètre pour la calculer
 - Communiquer : rédiger l'étude de la fonction Gamma d'Euler avec toutes les hypothèses

Exercice 1 : Question de cours : continuité et dérivation sous l'intégrale (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans cet exercice, A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, et k une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs réelles.

- a. Énoncez le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre $x \rightarrow \int_I k(x, t) dt$, avec une hypothèse de domination. (1 point)

b. Énoncez le théorème de dérivation sous le signe intégrale (classe $\mathcal{C}^1$), avec une hypothèse de domination sur tout segment de $\mathbb{A}$. (1 point)

c. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$. Démontrez que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$, puis de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. (1 point)

Exercice 2 : Une intégrale calculée par dérivation (4 points)

Pour $x > -1$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt.$$

a. Démontrez que, pour tout $x > -1$, la fonction $t \rightarrow \frac{t^x - 1}{\ln t}$ est intégrable sur $]0, 1[$. (1,5 point)

b. Démontrez que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$ et calculez $F'(x)$. Vous rédigerez l'hypothèse de domination sur un segment $[a, b]$ inclus dans $] -1, +\infty[$. (1,5 point)

c. En déduire $F(x)$ pour $x > -1$, puis la valeur de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$. (1 point)

Exercice 3 : La fonction Gamma d'Euler (5 points)

On pose, lorsque cela a un sens, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- Démontrez que $\Gamma(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$. (1 point)
- Démontrez que $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, puis calculez $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$. (1 point)
- Démontrez que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et donnez $\Gamma''(x)$ sous forme d'intégrale. (1,5 point)
- Démontrez que Γ est strictement convexe, puis qu'elle admet un minimum global sur $]0, +\infty[$, atteint en un unique point de $]1, 2[$. (1,5 point)

Exercice 4 : Problème : l'intégrale de Gauss (8 points)

On définit, pour tout réel x ,

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

- Démontrez que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimez $g'(x)$ sous forme d'intégrale. (2 points)
- Démontrez que $f' + g' = 0$ sur $\mathbb{R}$, puis que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout réel x . (2 points)
- Démontrez que $g(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. (1,5 point)
- Justifiez la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et démontrez que cette intégrale vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (1,5 point)
- En déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, où Γ est la fonction de l'exercice 3. (1 point)



Réviser avant le contrôle : intégrales dépendant d'un paramètre

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Intégrales à paramètre](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégrales à paramètre](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : partiel de S4, séries entières et de Fourier](#)