

Contrôle de maths L2 : groupes, sous-groupes et morphismes

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Groupes, sous-groupes et morphismes
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer le théorème de Lagrange à l'aide des classes à gauche
 - Calculer : déterminer l'ordre d'un élément et décomposer une permutation en cycles
 - Chercher : décrire tous les sous-groupes d'un groupe cyclique
 - Communiquer : identifier et justifier le noyau et l'image d'un morphisme

Exercice 1 : Question de cours : le théorème de Lagrange (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini de neutre e et H un sous-groupe de G .

- Pour $x, y \in G$, on pose $x \sim y$ si $x^{-1}y \in H$. Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence et que la classe de x est $xH = \{xh, h \in H\}$. (1 point)
- Montrez que, pour tout $x \in G$, l'application $h \rightarrow xh$ est une bijection de H sur xH . (1 point)

- c. Énoncez et démontrez le théorème de Lagrange. (1 point)
- d. Déduisez-en que l'ordre de tout élément de G divise $|G|$, puis que tout groupe d'ordre premier est cyclique. (1 point)

Exercice 2 : Le groupe cyclique $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (4 points)

On travaille dans le groupe additif $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

- a. Montrez que l'ordre de $\bar{k}$ est $\frac{12}{k \wedge 12}$, puis donnez l'ordre de chacun des douze éléments. (1 point)
- b. Quels sont les générateurs de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$? (0,5 point)
- c. Montrez que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ est engendré par une classe $\bar{d}$ avec d diviseur positif de 12. Déduisez-en la liste de tous les sous-groupes, avec leur ordre et les inclusions entre eux. (1,5 point)
- d. On définit $f : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ par $f(\bar{x}) = \overline{3x}$. Justifiez que f est bien définie et que c'est un morphisme. Déterminez son noyau et son image, puis vérifiez que $|\ker f| \times |\operatorname{Im} f| = 12$. (1 point)

Exercice 3 : Une permutation de S_7 (4 points)

On considère la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ du groupe symétrique S_7 .

- a. Décomposez σ en produit de cycles à supports disjoints. (1 point)
- b. Déterminez l'ordre de σ et sa signature $\epsilon(\sigma)$. (1 point)
- c. Calculez σ^{2026} sous forme de produit de cycles à supports disjoints. (1 point)

d. Déterminez le plus grand ordre possible d'un élément de S_7 . (1 point)

Exercice 4 : Un morphisme vers le cercle unité (3 points)

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et on définit $\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ par $\varphi(t) = e^{2i\pi t}$.

- Montrez que φ est un morphisme de groupes. (0,5 point)
- Déterminez le noyau et l'image de φ . (1 point)
- Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes quelconque. Démontrez que f est injectif si et seulement si $\ker f$ est réduit au neutre. (1 point)
- Soit $n \geq 1$. Montrez que $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$ est un sous-groupe cyclique de $\mathbb{U}$, d'ordre n . (0,5 point)

Exercice 5 : Problème : groupes d'ordre 4 et morphismes (5 points)

- Soit G un groupe dans lequel $x^2 = e$ pour tout x . Montrez que G est commutatif. (1 point)
- Soit G un groupe d'ordre 4. Montrez que G est cyclique ou que tout élément vérifie $x^2 = e$. Déduisez-en que tout groupe d'ordre 4 est commutatif. (1,5 point)
- Soit $f : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ un morphisme de groupes et $a \in \{0, 1, \dots, 7\}$ tel que $f(\bar{1}) = \bar{a}$, où $\bar{a}$ désigne la classe de a modulo 8. Montrez que $12a \equiv 0 \pmod{8}$. Déterminez ensuite tous les morphismes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. (1,5 point)
- Existe-t-il un morphisme injectif de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$? Un morphisme surjectif? Justifiez à l'aide du théorème de Lagrange. (1 point)



Réviser avant le contrôle : groupes, sous-groupes et morphismes

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Groupes](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [groupes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).