

Contrôle de maths L2 : géométrie affine et barycentres

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Géométrie affine
- **Durée conseillée** : 2 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer l'existence du barycentre et sa conservation par une application affine
 - Calculer : obtenir une équation cartésienne de plan, l'intersection d'une droite et d'un plan, des coordonnées barycentriques
 - Modéliser : reconnaître une homothétie, une translation ou une projection à partir de son expression analytique
 - Chercher : démontrer les théorèmes de Ménélaüs et de Céva par l'associativité du barycentre

Exercice 1 : Question de cours : barycentre et applications affines (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de direction E , $A_1, \dots, A_n$ des points de $\mathcal{E}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels de somme $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$.

- a. Démontrez qu'il existe un unique point G tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$, et exprimez $\overrightarrow{OG}$ pour un point O quelconque. (2 points)
- b. Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans un espace affine $\mathcal{F}$, de partie linéaire $\vec{f}$. Démontrez que $f(G)$ est le barycentre des points pondérés $(f(A_i), \alpha_i)$. (2 points)

Exercice 2 : Plans et droites de l'espace affine (4 points)

L'espace affine $\mathbb{R}^3$ est muni de son repère canonique. On considère les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ et $C(0, 0, 3)$.

- a. Justifiez que A , B , C ne sont pas alignés, puis déterminez une équation cartésienne du plan $\mathcal{P} = (ABC)$. (1 point)
- b. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $E(2, 1, 0)$ et dirigée par $\vec{u}(1, 0, -3)$. Montrez que $\mathcal{D}_1$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$. (1 point)
- c. Soit $\mathcal{D}_2$ la droite passant par l'origine et dirigée par $\vec{v}(1, 2, 0)$. Donnez un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}_2$, puis déterminez le point d'intersection I de $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{P}$. (1 point)
- d. Déterminez les coordonnées barycentriques de I dans le repère affine (A, B, C) du plan $\mathcal{P}$, et interprétez le résultat. (1 point)

Exercice 3 : Homothéties, translations et projections (4 points)

Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, on considère les applications définies par

$$f(x, y) = (-2x + 3, -2y + 6), \quad g(x, y) = (x + 2, y - 1), \quad p(x, y) = \left(\frac{x + y + 1}{2}, \frac{x + y - 1}{2} \right).$$

- Montrez que f et g sont affines, donnez leurs parties linéaires et identifiez-les (nature et éléments caractéristiques). (1 point)
- Déterminez la nature de $f \circ g$ et ses éléments caractéristiques. Retrouvez son centre à partir de celui de f et du vecteur de g . (1,5 point)
- Montrez que $p \circ p = p$. Déterminez l'ensemble Δ des points fixes de p et le noyau de sa partie linéaire, puis concluez que p est une projection dont vous préciserez la base et la direction. (1,5 point)

Exercice 4 : Barycentre de trois points et associativité (3 points)

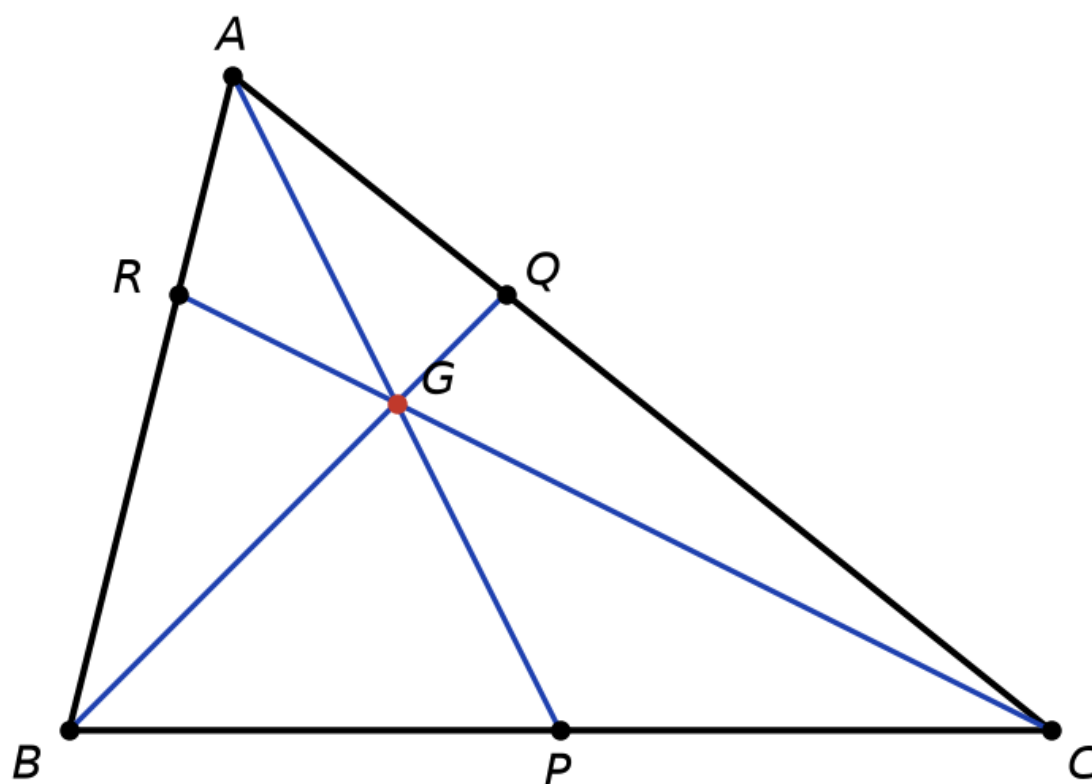
Soit ABC un triangle du plan et G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$.

- On note A' le barycentre de $(B, 2)$ et $(C, 3)$. Montrez que G appartient au segment $[AA']$ et que $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AA'}$. (1 point)
- Donnez les coordonnées de G dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. (1 point)
- Déterminez l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan tels que le vecteur $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BC}$. (1 point)

Exercice 5 : Problème : théorèmes de Ménélaüs et de Ceva (5 points)

Soit ABC un triangle et p, q, r trois réels distincts de 0 et de 1. On définit les points $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$, $R \in (AB)$ par

$$\overrightarrow{PB} = p \overrightarrow{PC}, \quad \overrightarrow{QC} = q \overrightarrow{QA}, \quad \overrightarrow{RA} = r \overrightarrow{RB}.$$



- Écrivez P , Q et R comme barycentres de deux sommets du triangle. (0,5 point)
- Théorème de Ménélaüs (sens direct) : on suppose $pqr = 1$. Pour un point O quelconque, établissez la relation $(1-p)\overrightarrow{OP} + p(1-q)\overrightarrow{OQ} + pq(1-r)\overrightarrow{OR} = \vec{0}$, puis déduisez-en que P, Q, R sont alignés. (1,5 point)
- Théorème de Ceva (sens direct) : on suppose $pqr = -1$ et $pq + 1 - p \neq 0$. En considérant le barycentre G de (A, pq) , $(B, 1)$, $(C, -p)$, démontrez que les droites (AP) , (BQ) et (CR) sont concourantes. (1,5 point)

- d. Application : P est le milieu de $[BC]$ et Q le point de $[CA]$ tel que $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Déterminez R sur (AB) pour que les trois céviennes soient concourantes, et précisez leur point de concours. Ensuite, déterminez le point R' de (AB) tel que P , Q , R' soient alignés. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : géométrie affine et barycentres

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Géométrie affine » en L2](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [géométrie affine](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).