

Contrôle de maths L2 : formes quadratiques, coniques et quadriques

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Formes quadratiques, coniques et quadriques
- **Durée conseillée** : 2 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3,5 points ; exercice 2 : 4,5 points ; exercice 3 : 3,5 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 4,5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : écrire la matrice et la forme polaire d'une forme quadratique, puis la réduire par la méthode de Gauss
 - Raisonner : démontrer la loi d'inertie de Sylvester par un argument de dimension
 - Représenter : réduire l'équation d'une conique dans un repère orthonormé propre et la tracer
 - Modéliser : relier la signature d'une forme quadratique à la nature géométrique d'une quadrique

Exercice 1 : Question de cours : loi d'inertie de Sylvester (3,5 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$ et q une forme quadratique sur E .

- a. Rappelez la définition d'une base q -orthogonale. Ensuite, énoncez la loi d'inertie de Sylvester et définissez la signature (p, s) de q ainsi que son rang. (1 point)

- b. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases q -orthogonales. On note p (respectivement p') le nombre de vecteurs e_i (respectivement e'_i) tels que $q(e_i) > 0$ (respectivement $q(e'_i) > 0$). En considérant le sous-espace F engendré par les e_i tels que $q(e_i) > 0$ et le sous-espace G' engendré par les e'_i tels que $q(e'_i) \leq 0$, démontrez que $p \leq p'$.
Concluez. (2,5 points)

Exercice 2 : Réduction de Gauss, rang et signature (4,5 points)

On considère les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^3$ définies par

$$q_1(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz + 6yz, \quad q_2(x, y, z) = xy + yz + zx.$$

- Écrivez la matrice A_1 de q_1 dans la base canonique, puis sa forme polaire φ_1 . (0,5 point)
- Réduisez q_1 par la méthode de Gauss. Vérifiez votre résultat à l'aide du déterminant de A_1 . (1,5 point)
- Donnez le rang et la signature de q_1 . La forme q_1 est-elle positive ? (0,5 point)
- Réduisez q_2 par la méthode de Gauss (on pourra poser $x = u + v$ et $y = u - v$), puis donnez son rang et sa signature. (1,5 point)
- Trouvez un vecteur non nul du cône isotrope de q_2 . (0,5 point)

Exercice 3 : La forme quadratique trace du carré (3,5 points)

Soit $n \geq 2$. Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(A, B) = \text{tr}(AB)$ et $q(A) = \text{tr}(A^2)$. On note $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques.

- Montrez que φ est une forme bilinéaire symétrique. (0,5 point)
- Calculez $q(S)$ pour $S \in \mathcal{S}_n$ et $q(A)$ pour $A \in \mathcal{A}_n$ en fonction de leurs coefficients. (1 point)
- Montrez que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont φ -orthogonaux. (0,5 point)
- Déduisez-en le rang et la signature de q , en exhibant une base q -orthogonale de E . (1,5 point)

Exercice 4 : Réduction orthogonale d'une conique (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0.$$

- Écrivez la matrice symétrique M de la partie quadratique $5x^2 - 6xy + 5y^2$. Déterminez ses valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres. (1,5 point)
- Montrez que $\mathcal{C}$ admet un unique centre Ω et calculez ses coordonnées. (1 point)
- Écrivez l'équation de $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé d'origine Ω dirigé par les vecteurs propres. Déduisez-en la nature de $\mathcal{C}$, ses demi-axes, son excentricité et les coordonnées de ses sommets dans le repère initial. Tracez l'allure de $\mathcal{C}$. (1,5 point)

Exercice 5 : Problème : une famille de quadriques de révolution (4,5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Pour un réel a , on considère la forme quadratique

$$q_\alpha(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha(xy + yz + zx)$$

et la quadrique $\mathcal{Q}_\alpha$ d'équation $q_\alpha(x, y, z) = 1$.

- Écrivez la matrice M_α de q_α . Déterminez ses valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres, en remarquant que $M_\alpha = (1 - \alpha)I_3 + \alpha J$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. (1 point)
- Donnez la signature de q_α selon les valeurs de α . (1 point)
- Déduisez-en la nature de $\mathcal{Q}_\alpha$ selon les valeurs de α . Précisez son axe de révolution quand il existe. (1,5 point)
- On prend $\alpha = 2$. Déterminez les points de $\mathcal{Q}_2$ situés sur la droite dirigée par $(1, 1, 1)$, puis montrez que $\mathcal{Q}_2$ ne rencontre pas le plan d'équation $x + y + z = 0$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : formes quadratiques, coniques et quadriques

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Formes quadratiques](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [formes quadratiques](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).