Contrôle de maths L2 : espaces probabilisés et conditionnement

Fiche du contrôle

- **Niveau :** licence L2
- **Chapitre :** Espaces probabilisés et conditionnement
- **Durée conseillée :** 2 h
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Communiquer : énoncer les axiomes d'un espace probabilisé et démontrer la continuité monotone
  - Modéliser : construire un espace probabilisé et un arbre pondéré adaptés à une expérience
  - Calculer : appliquer la formule des probabilités totales et la formule de Bayes
  - Raisonner : démontrer ou réfuter l'indépendance d'événements et utiliser le lemme de Borel-Cantelli

Exercice 1 : Question de cours : tribus, continuité monotone et Bayes (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans tout l'exercice, Ω est un ensemble non vide.

a. Donnez la définition d'une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω, puis celle d'une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements. Énoncez puis démontrez la propriété de continuité croissante de P. *(1,5 point)*

c. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements, avec I fini ou dénombrable et $P(A_i) > 0$ pour tout i. Énoncez la formule des probabilités totales. Démontrez ensuite la formule de Bayes : pour tout événement B tel que $P(B) > 0$ et tout $j \in I$, exprimez $P_B(A_j)$. *(1,5 point)*

Exercice 2 : Lancers infinis et lemme de Borel-Cantelli (4 points)

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modélisant l'expérience, dans lequel les lancers sont mutuellement indépendants. Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement « les n premiers lancers donnent tous pile ».

a. Calculez $P(A_n)$. *(0,5 point)*

b. Exprimez l'événement « on n'obtient que des piles » à l'aide des A_n, puis calculez sa probabilité en justifiant le théorème utilisé. *(1 point)*

c. Déduisez-en la probabilité d'obtenir au moins une fois face. *(0,5 point)*

d. Soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements telle que la série $\sum P(E_n)$ converge. On pose $L = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} E_k$. Démontrez que $P(L) = 0$ (lemme de Borel-Cantelli). Appliquez ce résultat aux événements E_n : « les lancers numéros $n, n+1, \ldots, 2n$ donnent tous pile ». Interprétez. *(2 points)*

Exercice 3 : Test de dépistage et formule de Bayes (4 points)

Une maladie touche $2\,\%$ d'une population. Un test de dépistage est positif chez $95\,\%$ des malades et négatif chez $90\,\%$ des personnes saines. On choisit une personne au hasard et on note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ». Les résultats peuvent rester sous forme de fractions.

a. Représentez la situation par un arbre pondéré, puis calculez $P(T)$. *(1 point)*

b. Calculez $P_T(M)$ et vérifiez que cette probabilité est inférieure à $\frac{1}{6}$. *(1 point)*

c. On fait passer à la personne un second test, de mêmes caractéristiques, dont le résultat positif est noté T_2 (le premier est noté $T_1 = T$). On suppose que, sachant M, les événements T_1 et T_2 sont indépendants, et qu'il en est de même sachant $\overline{M}$. Calculez la probabilité que la personne soit malade sachant que les deux tests sont positifs, et montrez qu'elle dépasse $\frac{1}{2}$. *(1,5 point)*

d. Les événements T_1 et T_2 sont-ils indépendants ? *(0,5 point)*

Exercice 4 : Indépendance deux à deux et mutuelle (3 points)

On lance deux dés équilibrés à six faces, discernables. On considère les événements A : « le premier dé donne un nombre pair », B : « le second dé donne un nombre pair » et C : « la somme des deux dés est paire ».

a. Décrivez un espace probabilisé fini adapté à l'expérience. *(0,5 point)*

b. Calculez $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, puis montrez que A, B, C sont indépendants deux à deux. *(1 point)*

c. Les événements A, B, C sont-ils mutuellement indépendants ? *(0,5 point)*

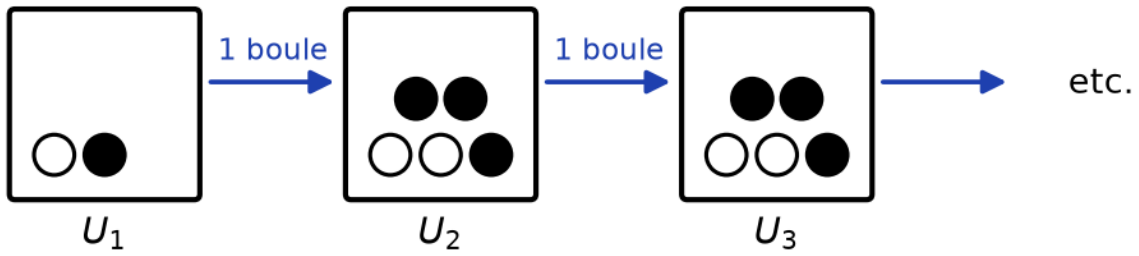
d. Dans un espace probabilisé quelconque, démontrez que si deux événements E et F sont indépendants, alors E et $\overline{F}$ le sont aussi. *(1 point)*

Exercice 5 : Problème : une chaîne d'urnes (5 points)

L'urne U_1 contient une boule blanche et une boule noire. Pour $k \geq 2$, l'urne U_k contient deux

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

boules blanches et trois boules noires. On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite une boule au hasard dans U_2 et on la place dans U_3, et ainsi de suite indéfiniment.



Pour $n \geq 1$, on note B_n l'événement « la boule tirée dans U_n est blanche », $N_n = \overline{B_n}$ et $p_n = P(B_n)$. On admet que, sachant la couleur de la boule tirée dans U_n, le tirage dans U_{n+1} ne dépend pas des tirages précédents.

a. Donnez $P_{B_1}(B_2)$ et $P_{N_1}(B_2)$. Construisez l'arbre des deux premiers tirages, puis calculez p_2. *(1 point)*

b. Démontrez que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} p_n$. *(1 point)*

c. Déterminez p_n en fonction de n, puis la limite de la suite (p_n). *(1,5 point)*

d. La deuxième boule tirée est blanche. Quelle est la probabilité que la première l'ait été aussi ? *(0,5 point)*

e. Calculez $P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n)$, puis la probabilité que toutes les boules tirées soient blanches. *(1 point)*

Réviser avant le contrôle : espaces probabilisés et conditionnement

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Espaces probabilisés » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** espaces probabilisés.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L2** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.