

Contrôle de maths L2 : différentiabilité, Taylor et extrema

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Différentiabilité, formule de Taylor et extrema
- **Durée conseillée** : 2 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3,5 points ; exercice 5 : 5,5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer ou réfuter la différentiabilité d'une fonction en un point
 - Calculer : dériver une fonction composée et résoudre une équation aux dérivées partielles par changement de variables
 - Chercher : déterminer et classer les points critiques à l'aide de la matrice hessienne
 - Modéliser : traduire un problème d'optimisation concret et justifier un minimum global par compacité

Exercice 1 : Question de cours : différentiabilité et Taylor-Young (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans cet exercice, U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, a un point de U et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$.

- a. Donnez la définition de « f est différentiable en a ». Démontrez ensuite que si f est différentiable en a , alors f est continue en a . (1,5 point)

- b. On suppose f de classe C^2 sur U et a point critique de f . Énoncez la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a . Démontrez alors que si la forme quadratique $q(h) = {}^t h H_f(a) h$ est définie positive, f admet un minimum local strict en a . (1,5 point)

Exercice 2 : Continuité, dérivées partielles et différentiabilité en l'origine (4 points)

On définit deux fonctions sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = g(0,0) = 0$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad g(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}.$$

- Démontrez que f est continue en $(0,0)$. (1 point)
- Calculez les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. (1 point)
- Démontrez que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. (1 point)
- Démontrez que g est différentiable en $(0,0)$ et donnez sa différentielle en ce point. (1 point)

Exercice 3 : Règle de la chaîne et équation aux dérivées partielles (4 points)

On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(E) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+y).$$

On note $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(x,y) = (x+y, x-y)$.

- Démontrez que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, de classe C^1 , dont la réciproque est de classe C^1 . Donnez φ^{-1} . (1 point)
- Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On pose $g = f \circ \varphi^{-1}$, de sorte que $f(x,y) = g(x+y, x-y)$. Exprimez $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ à l'aide des dérivées partielles de g , puis traduisez (E) en une équation vérifiée par g . (1,5 point)
- Résolvez (E). (1 point)
- Déterminez la solution de (E) qui vérifie $f(x,0) = 0$ pour tout réel x . (0,5 point)

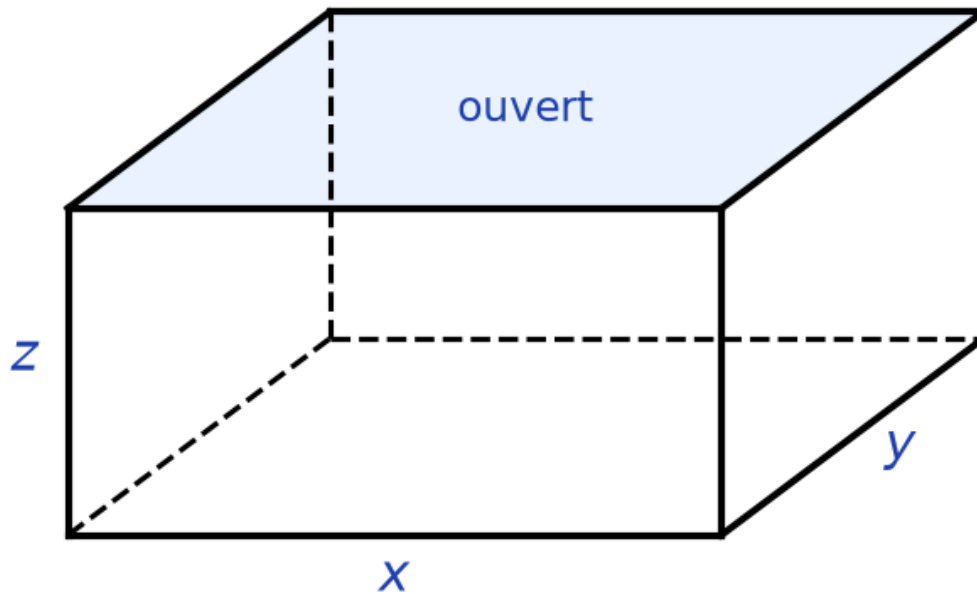
Exercice 4 : Points critiques et matrice hessienne (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

- Déterminez les points critiques de f . (1 point)
- Précisez la nature de chacun d'eux, à l'aide des notations de Monge r , s , t . (1,5 point)
- Développez $f(1+h, 1+k)$ et comparez le résultat avec la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en $(1,1)$. (0,5 point)
- La fonction f admet-elle un extremum global sur $\mathbb{R}^2$? (0,5 point)

Exercice 5 : Problème : boîte ouverte de surface minimale (5,5 points)

Un artisan fabrique une boîte en forme de pavé droit, sans couvercle, de volume 32 dm^3 . On note x et y les dimensions du fond et z la hauteur, en décimètres, avec $x, y, z > 0$. Il veut utiliser le moins de matière possible, c'est-à-dire minimiser l'aire totale des cinq faces.



- Exprimez z en fonction de x et y . Démontrez que l'aire des cinq faces vaut $S(x,y) = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}$, où (x,y) décrit l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$. (0,5 point)
- Justifiez que S est de classe C^2 sur U , puis déterminez ses points critiques. (1,5 point)
- Calculez la matrice hessienne de S au point critique et concluez sur sa nature locale. (1 point)
- On pose $K = \left[\frac{4}{3}, 36\right]^2$. Démontrez que $S(x,y) \geq 48$ pour tout $(x,y) \in U$ n'appartenant pas à l'intérieur de K . (1 point)
- En utilisant la compacité de K , démontrez que S admet un minimum global sur U . Donnez les dimensions de la boîte optimale et l'aire de matière utilisée. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : différentiabilité, Taylor et extrema

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Différentielle et extrema](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [différentielle et extrema](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : partiel de S3, fonctions de deux variables](#)