

Contrôle de maths L2 : convergence uniforme des séries de fonctions

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitre** : Suites et séries de fonctions
- **Durée conseillée** : 2 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3,5 points ; exercice 5 : 4,5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Communiquer : définir convergence simple et uniforme et démontrer la continuité d'une limite uniforme
 - Calculer : déterminer la norme infinie d'un écart par une étude de variations
 - Raisonner : exhiber un contre-exemple où limite et intégrale ne s'intervertissent pas
 - Chercher : établir la convergence normale d'une série de fonctions et en déduire la régularité de sa somme

Exercice 1 : Question de cours : convergence uniforme et interversions (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans cet exercice, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- a. Donnez les définitions de « (f_n) converge simplement vers f sur I » et de « (f_n) converge uniformément vers f sur I », cette dernière à l'aide de la norme infinie. (1 point)

- b. On suppose chaque f_n continue sur I et la convergence uniforme sur I . Démontrez que f est continue sur I . (2 points)
- c. On suppose $I = [a, b]$, avec $a < b$, les f_n et f continues, et la convergence uniforme sur $[a, b]$. Démontrez que $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$. (1 point)

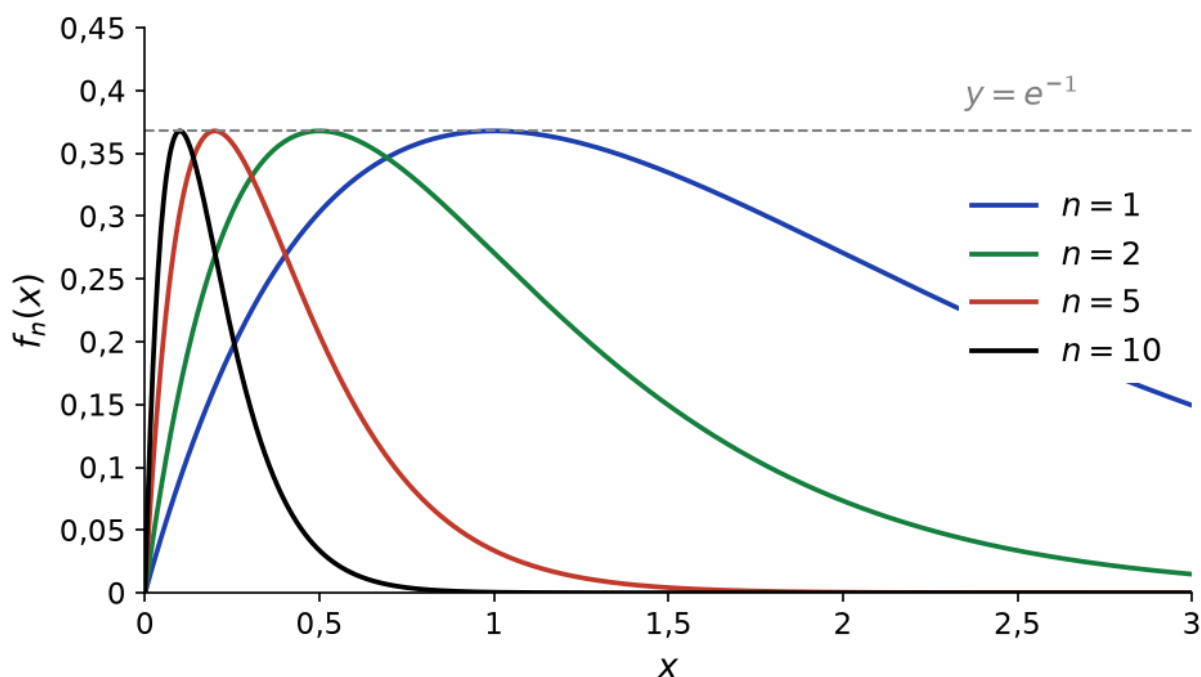
Exercice 2 : La suite de fonctions x puissance n (4 points)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = x^n$ et $g_n(x) = x^n(1 - x)$.

- a. Déterminez la limite simple f de la suite (f_n) sur $[0, 1]$. (0,5 point)
- b. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$? Donnez deux justifications différentes. (1 point)
- c. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Démontrez que (f_n) converge uniformément sur $[0, \alpha]$. (1 point)
- d. Calculez $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ et comparez-la à $\int_0^1 f(x) dx$. Que peut-on en conclure sur la réciproque de la question 1 c)? (0,5 point)
- e. Démontrez que (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$. (1 point)

Exercice 3 : Une bosse qui glisse vers l'origine (4 points)

Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = n x e^{-nx}$. La figure représente f_1 , f_2 , f_5 et f_{10} .



- Démontrez que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$. (0,5 point)
- Étudiez les variations de f_n , puis calculez $|f_n|_\infty$ sur $[0, +\infty[$. La convergence est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$? (1 point)
- Soit $a > 0$. Démontrez que la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$. (1 point)
- On pose $h_n = n f_n$. Démontrez que (h_n) converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$, puis calculez $\int_0^1 h_n(x) dx$ et sa limite. Commentez. (1,5 point)

Exercice 4 : Série de fonctions et convergence normale (3,5 points)

Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = x e^{-nx}$.

- Démontrez que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. Calculez sa somme $S(x)$, en distinguant $x = 0$ et $x > 0$. (1 point)

- b. Calculez $\|u_n\|_\infty$ sur $[0, +\infty[$. La série converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$? (1 point)
- c. Soit $a > 0$. Démontrez que la série converge normalement sur $[a, +\infty[$. (0,5 point)
- d. Étudiez la continuité de S en 0. La convergence de la série est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$? (1 point)

Exercice 5 : Problème : la fonction zêta de Riemann (4,5 points)

Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

- a. Soit $a > 1$. Démontrez que la série converge normalement sur $[a, +\infty[$. Déduisez-en que ζ est définie et continue sur $]1, +\infty[$. (1 point)
- b. Démontrez que ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, exprimez $\zeta'(s)$ sous forme de série, et déduisez-en le sens de variation de ζ . (1,5 point)
- c. Déterminez la limite de $\zeta(s)$ quand $s \rightarrow +\infty$, en citant le théorème utilisé. (1 point)
- d. À l'aide d'une comparaison entre série et intégrale, démontrez que pour tout $s > 1$:

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Déduisez-en un équivalent de $\zeta(s)$ quand $s \rightarrow 1^+$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : convergence uniforme des séries de fonctions

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Suites et séries de fonctions](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [suites et séries de fonctions](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).