

Contrôle de maths L2 : comparaison série-intégrale et restes

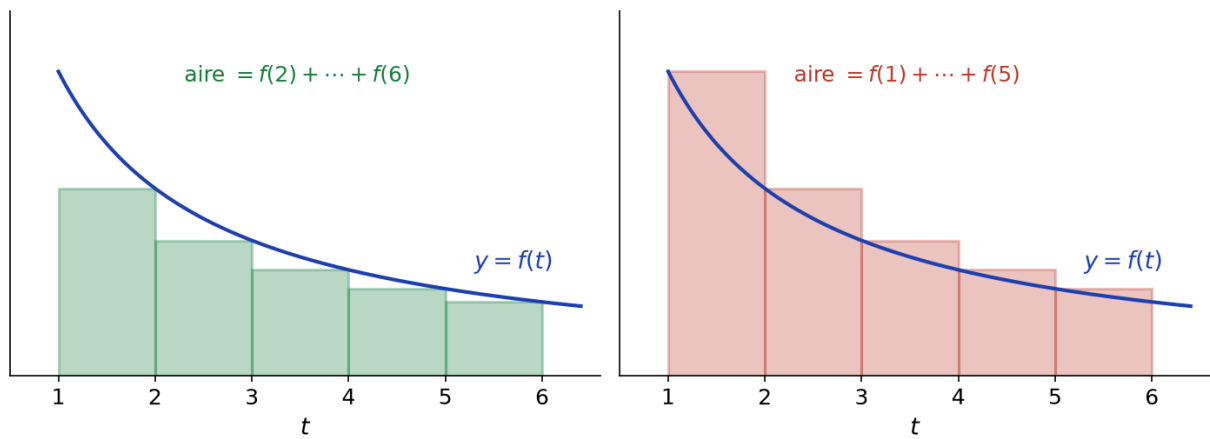
Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L2
- **Chapitres** : Séries numériques à termes positifs + Intégrales généralisées
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 7 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer le théorème de comparaison série-intégrale
 - Calculer : encadrer sommes partielles et restes par des intégrales
 - Chercher : obtenir des équivalents et des développements asymptotiques
 - Modéliser : relier la nature d'une série à celle d'une intégrale généralisée

Exercice 1 : Question de cours, le théorème de comparaison série-intégrale (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 3 heures.

Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. La figure ci-dessous représente une telle fonction et deux familles de rectangles.



- a. Montrez que, pour tout entier $k \geq 2$, $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$. (0,5 point)
- b. Démontrez que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature. (1,5 point)
- c. Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$. Montrez que $w_n \geq 0$ et que la série $\sum w_n$ converge, quelle que soit la nature de $\sum f(n)$. (1 point)
- d. On suppose que $\sum f(n)$ converge et on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$. Montrez que $\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$. (1 point)

Exercice 2 : La constante d'Euler (4 points)

Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln n$.

- a. En appliquant l'exercice 1 c) à $f : t \rightarrow \frac{1}{t}$, montrez que $u_n = 1 - \sum_{k=2}^n w_k$, puis que la suite (u_n) converge. On note γ sa limite. (1,5 point)
- b. Montrez que $\ln(n+1) \leq H_n$ pour tout $n \geq 1$, puis que $0 \leq \gamma \leq 1$. (1 point)
- c. Justifiez que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, puis calculez $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. (1,5 point)

Exercice 3 : Deux séries de Bertrand, somme partielle et reste (5 points)

On admet que les résultats de l'exercice 1 restent valables pour une fonction continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, les sommes commençant alors au rang 2.

- a. Montrez que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge. (1 point)
- b. On note $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$. Montrez que, pour $n \geq 3$,
- $$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq S_n \leq \frac{1}{2 \ln 2} + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2),$$
- puis que $S_n \sim \ln(\ln n)$. (2 points)
- c. Montrez que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^2}$ converge et que son reste $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2}$ vérifie $\rho_n \sim \frac{1}{\ln n}$. (2 points)

Exercice 4 : Problème, la fonction zêta au voisinage de 1 (7 points)

Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et, pour $n \geq 1$, $R_n(s) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$.

- a. Justifiez l'existence de $\zeta(s)$, puis montrez que $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$. Déduisez-en un équivalent de $\zeta(s)$ quand $s \rightarrow 1^+$. (1,5 point)
- b. Encadrez $R_n(s)$ à l'aide de l'exercice 1 d). (1 point)
- c. Dans cette question, $s = 2$. Montrez que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ est une valeur approchée de $\zeta(2)$ à 10^{-3} près dès que $n \geq 1000$, et que ce n'est pas le cas si $n \leq 998$. (1 point)
- d. Pour $k \geq 1$ et $s \geq 1$, on pose $d_k(s) = \frac{1}{k^s} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s}$. Montrez que $0 \leq d_k(s) \leq \frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}$, puis que, pour $s > 1$, $\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k(s)$. (1,5 point)
- e. Montrez que $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k(1) = \gamma$, où γ est la constante de l'exercice 2. (0,5 point)
- f. On admet que, pour tout $k \geq 1$, la fonction $s \rightarrow d_k(s)$ est continue sur $[1, 2]$. Montrez que $\lim_{s \rightarrow 1^+} \sum_{k=1}^{+\infty} d_k(s) = \gamma$, c'est-à-dire $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ quand $s \rightarrow 1^+$. On pourra majorer les restes $\sum_{k > N} d_k(s)$ uniformément en s . (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : comparaison série-intégrale et restes

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Séries à termes positifs](#) » en L2 et « [Intégrales généralisées](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries à termes positifs](#), [intégrales généralisées](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : séries numériques à termes positifs](#)
- [Contrôle de maths L2 : intégrales généralisées et intégrabilité](#)