

Contrôle de maths L1 : systèmes linéaires, pivot de Gauss et inverse

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Systèmes linéaires et calcul matriciel
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3,5 points ; exercice 5 : 4,5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer les règles de calcul sur l'inverse et la transposée d'un produit
 - Calculer : résoudre un système linéaire à paramètre par la méthode du pivot de Gauss
 - Calculer : obtenir les puissances d'une matrice par la formule du binôme
 - Calculer : inverser une matrice 3×3 par la méthode de Gauss-Jordan
 - Chercher : établir des propriétés des matrices triangulaires

Exercice 1 : Question de cours : inverse et transposée d'un produit (3 points)

Calculatrice interdite. Les déterminants ne sont pas autorisés dans ce sujet.

Dans tout le sujet, n est un entier naturel non nul et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n .

- a. Donnez la définition d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez que si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. (1,5 point)

- b. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Démontrez, à l'aide des coefficients, que $(AB)^T = B^T A^T$. (1,5 point)

Exercice 2 : Système linéaire à paramètre (5 points)

Soit m un réel. On considère le système d'inconnues réelles x, y, z :

$$(S_m) \begin{cases} x + y + m z = 1 \\ x + m y + z = 1 \\ m x + y + z = 1 \end{cases}$$

- a. À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes que vous préciserez, transformez (S_m) en un système triangulaire équivalent. (2 points)
- b. On suppose $m \neq 1$ et $m \neq -2$. Montrez que (S_m) admet une unique solution et déterminez-la. (1,5 point)
- c. Résolvez (S_1) et (S_{-2}) . (1,5 point)

Exercice 3 : Puissances d'une matrice par la formule du binôme (4 points)

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = A - 2I_3.$$

- Calculez N , N^2 et N^3 . (1 point)
- Justifiez que l'on peut appliquer la formule du binôme de Newton à $A = 2I_3 + N$, puis donnez l'expression de A^n pour tout entier $n \geq 2$, sous forme d'une matrice explicite. (2,5 points)
- Vérifiez votre formule pour $n = 2$ en calculant directement A^2 . (0,5 point)

Exercice 4 : Inverse d'une matrice par la méthode de Gauss-Jordan (3,5 points)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- Par la méthode de Gauss-Jordan appliquée à la matrice augmentée $(M | I_3)$, montrez que M est inversible et calculez M^{-1} . (2,5 points)
- En déduire la solution du système $x + 2y + 3z = 1$, $y + 4z = 2$, $5x + 6y = 3$. (1 point)

Exercice 5 : Problème : matrices triangulaires supérieures (4,5 points)

On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des matrices $T = (t_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures, c'est-à-dire telles que $t_{ij} = 0$ dès que $i > j$.

- Soient $S = (s_{ij})$ et $T = (t_{ij})$ dans $\mathcal{T}_n$. Montrez que $ST \in \mathcal{T}_n$ et que ses coefficients diagonaux sont les produits $s_{ii} t_{ii}$. (1,5 point)
- Soit $T \in \mathcal{T}_n$ dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. Montrez que, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $TX = Y$ admet une unique solution X . En déduire que T est inversible. (1,5 point)

c. Avec les hypothèses de b), montrez que T^{-1} est triangulaire supérieure. (1 point)

d. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = 0$. Montrez que $A = 0$. (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : systèmes linéaires, pivot de Gauss et inverse

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Systèmes linéaires et matrices](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [systèmes linéaires et matrices](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).