

Contrôle de maths L1 : suites, convergence et suites adjacentes

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Suites numériques
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 7 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer une convergence ou une divergence avec la définition epsilon et les suites extraites
 - Calculer : étudier la monotonie d'une suite par différence de deux termes consécutifs
 - Modéliser : étudier une suite récurrente à l'aide d'un intervalle stable
 - Communiquer : rédiger une démonstration de cours complète (Bolzano-Weierstrass)

Exercice 1 : Théorème de Bolzano-Weierstrass (4 points)

Calculatrice interdite.

Cette question de cours porte sur les suites réelles bornées.

- Énoncez le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles. (1 point)
- Démontrez ce théorème par dichotomie. Vous construirez deux suites adjacentes (a_k) et (b_k) telles que chaque intervalle $[a_k, b_k]$ contienne une infinité de termes de la suite, puis une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. (3 points)

Exercice 2 : Convergence et divergence par la définition (4 points)

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$ et $v_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

- Démontrez, en revenant à la définition avec ε , que la suite (u_n) converge vers 2. Vous donnerez un rang N explicite en fonction de ε . (2 points)
- En étudiant les suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) , démontrez que la suite (v_n) diverge. (2 points)

Exercice 3 : Suites adjacentes et irrationalité de e (5 points)

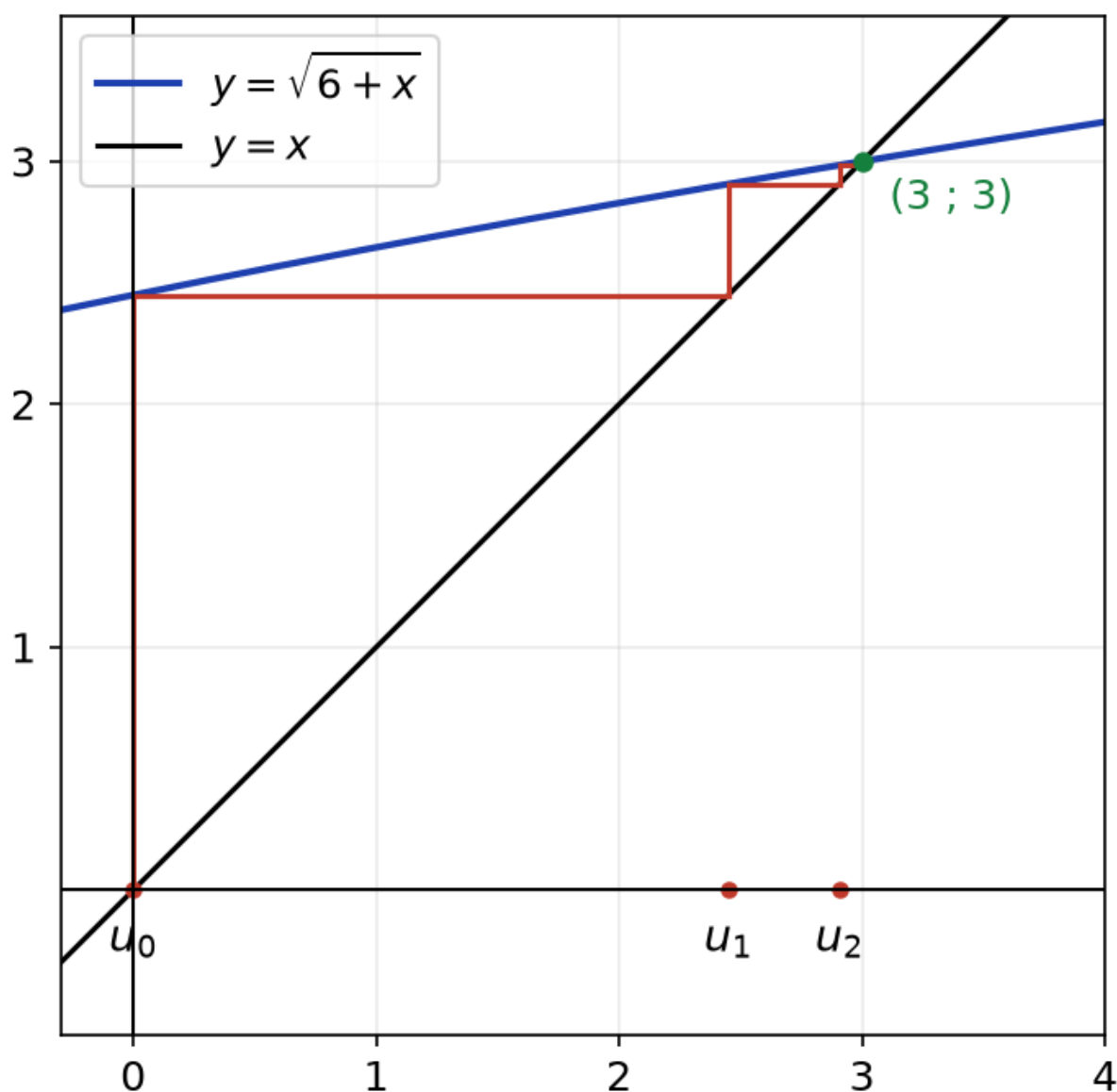
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

- Montrez que la suite (u_n) est strictement croissante et que la suite (v_n) est strictement décroissante. (2 points)
- Montrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en conclure ? (1 point)
- On note ℓ leur limite commune (on admet que $\ell = e$). Justifiez que, pour tout $n \geq 1$, $u_n < \ell < v_n$. Donnez un encadrement de ℓ par deux fractions en prenant $n = 3$. (1 point)
- On suppose par l'absurde que $\ell = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls. En multipliant l'encadrement de la question c) écrit pour $n = q$ par $q \cdot q!$, obtenez une contradiction. Concluez. (1 point)

Exercice 4 : Suite récurrente et intervalle stable (7 points)

On considère la fonction f définie sur $[-6, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{6+x}$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. La figure ci-dessous représente la courbe de f , la droite d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite.



- a. Montrez que f est croissante sur $[0, 3]$ et que l'intervalle $[0, 3]$ est stable par f , c'est-à-dire $f([0, 3]) \subset [0, 3]$. (1 point)

- b. Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$. (1,5 point)
- c. Déduisez-en que (u_n) converge, puis déterminez sa limite ℓ en justifiant soigneusement le passage à la limite. (1,5 point)
- d. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{5}|u_n - 3|$. Déduisez-en que $0 \leq 3 - u_n \leq \frac{3}{5^n}$, puis un rang n à partir duquel u_n est une valeur approchée de 3 à 10^{-6} près. (1,5 point)
- e. On garde la même fonction f mais on part de $u_0 = 10$. Montrez que la suite obtenue est décroissante, minorée par 3, et qu'elle converge encore vers 3. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : suites, convergence et suites adjacentes

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Suites numériques » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [suites numériques](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : suites, continuité et dérivation](#)